ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
1974

УДК 517.3(075.8)

Слободецкий Л. Н.

С 48 Интегральное исчисление. Учеб. пособие для втузов. М., «Высшая школа», 1974.

128 с. с ил.

В учебном пособии в отличие от традиционного способа определения интеграла автор вводит понятие интеграла как аддитивной функции соответствующего многообразия, определенным образом связанной с подынтегральной функцией. Подобная трактовка интеграла заслуживает внимания ввиду своей простоты и наглядности.

Предназначается для студентов втузов.

$С \frac{0223-533}{001(01)-74} 60-74$ 517.3

Рецензенты:

кафедра высшей математики МАИ
и канд. физ.-матем. наук Р. С. Гутер.

ЛЕВ НАУМОВИЧ СЛОБОДЕЦКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор Ж. И. Яковлева. Художник А. К. Зефиров.
Художественный редактор В. И. Пономаренко.
Технический редактор Т. А. Епифанова. Корректор В. В. Краснов

Сдано в набор 28/VI 1973 г. Подп. к печати 29/XII 1973 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 1. Объем 4 печ. л. Усл. п. л. 6,72.
Уч.-изд. л. 5,91 Изд. № ФМ--528 Тираж 38 000 экз. Зак. 858
Цена 17 коп.

План выпуска литературы для вузов и техникумов
издательства «Высшая школа» на 1974 г. Позиция № 60

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Владимирская типография Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положен дополненный и переработанный курс лекций по интегральному исчислению (определенный, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы), прочитанный автором студентам Ленинградского института водного транспорта. В отличие от ставшего традиционным Риманова способа определения интеграла как предела интегральных сумм, автор рассматривает интеграл как аддитивную функцию соответствующего многообразия (промежутка, области, линии, поверхности), связанную с подынтегральной функцией, образно говоря, как масса с плотностью. Подобный подход хотя и сужает класс интегрируемых функций до непрерывных (или, при распространении понятия интеграла по аддитивности, — до кусочно-непрерывных), однако позволяет изложить материал в свете современной теории меры и интеграла, а также сделать его наглядным и простым для понимания.

Следует также отметить, что на практике интеграл чаще всего применяется именно в смысле, принятом в настоящем учебном пособии. Дело в том, что обычно при выражении с помощью интеграла какой-нибудь аддитивной величины не составляют интегральные суммы, а находят так называемый элемент (или дифференциал) этой величины, который затем интегрируется по соответствующему многообразию. В настоящем учебном пособии этот метод лежит в основе определения интеграла любого типа. Предлагаемый подход к понятию интеграла, хорошо известный любому квалифицированному математику, не является новым и в учебной литературе*. В определенном смысле он даже более стар, чем конструктивное понимание интеграла, поскольку уже давно

---

* См., например, книгу: Толстов Г. П. Курс математического анализа. Т. 2. Гостехиздат, 1957.

определенный интеграл отождествляется с площадью плоской фигуры, двойной интеграл — с объемом тела и т. д., что, по существу, и означает трактовку интеграла как аддитивной функции соответствующего многообразия.

В настоящем пособии нет раздела, посвященного теории неопределенного интеграла, — предполагается, что читатель уже познакомился или познакомится с этим разделом по любому курсу математического анализа для вузов. В нем также не дается определения длины линии, площади плоской фигуры и поверхности, объема тела и т. д., — считается, что читатель имеет об этих понятиях достаточно развитое интуитивное представление. В ряде случаев в целях создания простого и наглядного аппарата для выражения аддитивных величин изложение недостаточно строгое, что, с точки зрения автора, вполне оправдано в пособии, предназначенном для слушателей втузов.

Автор

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА I
АДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ПРОМЕЖУТКА

§ 1. Функция точки и функция промежутка

Символом $<a, b>$ будем обозначать промежуток любого типа с концами a и b, т. е. либо замкнутый промежуток $[a, b]$, либо открытый промежуток (a, b), либо полуоткрытые промежутки $(a, b]$ и $[a, b)$.

Напомним известное определение функции одной переменной: *переменная y называется функцией переменной x, определенной в промежутке $\Omega=<a, b>$, если каждой точке x из этого промежутка поставлено в соответствие определенное значение переменной y.* Кратко это записывается так:

$$y=f(x), \quad x\in\Omega.$$

Здесь Ω — область определения функции, x — независимая переменная или аргумент, y — зависимая переменная или функция, f — знак функции. В приведенном определении функции аргументом является точка из некоторого множества (в данном случае из промежутка), поэтому говорят, что *y есть функция точки x.*

Рассмотрим еще одно понятие функции, аргументом которой является переменный промежуток. Предварительно введем понятие частичного промежутка промежутка Ω.

Промежуток $\sigma=<\alpha, \beta>$ называется *частичным промежутком промежутка* Ω, если все его точки принадлежат промежутку Ω. При этом не исключено, что σ может быть одноточечным промежутком (т. е. замкнутым промежутком $[\alpha, \alpha]$) или совпадать с Ω.

Обозначим через $A(\Omega)$ некоторую совокупность (не обязательно всех) частичных промежутков промежутка Ω. Говорят, что *переменная y есть функция промежутка σ, заданная на множестве $A(\Omega)$, если каждому промежутку σ из множества $A(\Omega)$ поставлено в соответствие определенное значение переменной y.* Кратко это записывается так:

$$y=F(\sigma), \quad \sigma\in A(\Omega).$$

Таким образом, отличие функции промежутка от функции точки состоит только в том, что для первой аргументом является промежуток σ, а для второй — точка x. Примером функции промежутка является его середина:

$$y = F(\sigma) = F(<\alpha, \beta>) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ввиду особой роли промежутка Ω будем его в дальнейшем называть *основным*.

§ 2. Понятие об аддитивной функции промежутка

Пусть теперь $A(\Omega)$ есть множество всех частичных промежутков основного промежутка Ω. Функция промежутка $F(\sigma)$ называется *аддитивной*, если при разбиении любого частичного промежутка σ на два частичных промежутка σ_1 и σ_2 без общих точек ($\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$) справедливо равенство

$$F(\sigma) = F(\sigma_1 + \sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2). \qquad (1.1)$$

Пример 1. Обозначим через $l(\sigma)$ длину промежутка σ. Длина промежутка σ равна сумме длин его частей σ_1 и σ_2 (рис. 1), поэтому

$$l(\sigma) = l(\sigma_1 + \sigma_2) = l(\sigma_1) + l(\sigma_2).$$

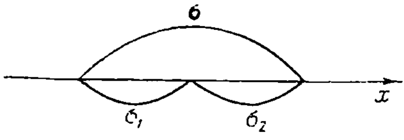

Рис. 1

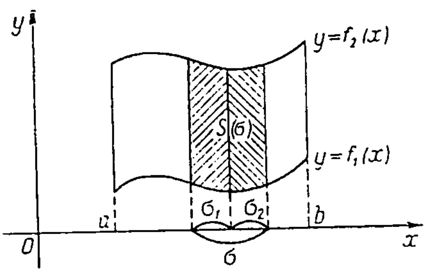

Рис. 2

Следовательно, $l(\sigma)$ есть аддитивная функция промежутка σ.

Пример 2. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная прямыми $x=a$ и $x=b$ и непрерывными линиями $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ ($f_1(x) \leqslant \leqslant f_2(x)$). Обозначим через $S(\sigma)$ площадь части криволинейной трапеции, расположенной над частичным промежутком σ промежутка $\Omega=[a, b]$ (рис. 2).

Если σ_1 и σ_2 — промежутки без общих точек и их сумма равна σ, то, очевидно,

$$S(\sigma) = S(\sigma_1) + S(\sigma_2).$$

Следовательно, $S(\sigma)$ есть аддитивная функция промежутка σ.

Пример 3. Предположим, что на промежутке Ω распределена некоторая масса. Функция $m(\sigma)$, равная массе частичного промежутка σ, есть аддитивная функция промежутка.

Приведем и докажем методом полной математической индукции теорему, позволяющую перенести свойство аддитивности (1.1) на произвольное количество частичных промежутков.

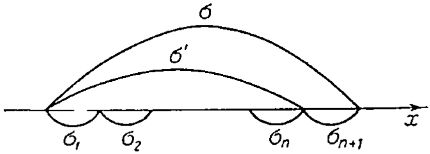

Рис. 3

Теорема 1.1. *Пусть частичный промежуток σ разбит на конечное число промежутков $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, каждая пара которых не имеет общих точек. Тогда для любой аддитивной функции $F(\sigma)$ справедливо равенство*

$$F(\sigma) = F\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k\right) = \sum_{k=1}^{n} F(\sigma_k). \tag{1.2}$$

Доказательство. При $n=2$ равенство (1.2) принимает вид (1.1) и справедливо в силу определения аддитивной функции. Предположим теперь, что равенство (1.2) справедливо для n промежутков. Докажем его справедливость для $n+1$ промежутков. Разобьем промежуток σ на частичные промежутки $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}$ попарно без общих точек (рис. 3). Очевидно, что $\sigma = \sigma' + \sigma_{n+1}$, где $\sigma' = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$. Промежутки σ' и σ_{n+1} не имеют общих точек, следовательно,

$$F(\sigma) = F(\sigma' + \sigma_{n+1}) = F(\sigma') + F(\sigma_{n+1}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} F(\sigma_k) + F(\sigma_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} F(\sigma_k),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Основные свойства аддитивных функций

Функция $F(\sigma)$ называется *линейной комбинацией функций* $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$, ..., $F_n(\sigma)$ с числовыми коэффициентами α_1, α_2, ..., α_n, если

$$F(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(\sigma) = \alpha_1 F_1(\sigma) + \alpha_2 F_2(\sigma) + \cdots + \alpha_n F_n(\sigma).$$

Теорема 1.2. *Линейная комбинация аддитивных функций промежутка есть также аддитивная функция промежутка.*

Доказательство. Разобьем частичный промежуток σ на два частичных промежутка σ_1 и σ_2, не имеющих общих точек. В силу аддитивности функций $F_k(\sigma)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ имеем

$$F(\sigma) = F(\sigma_1 + \sigma_2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(\sigma_1 + \sigma_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [F_k(\sigma_1) + F_k(\sigma_2)] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(\sigma_1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(\sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2).$$

Следовательно, $F(\sigma)$ является аддитивной функцией промежутка σ. Из доказанного предложения следует аддитивность суммы и разности аддитивных функций.

Функция промежутка $F(\sigma)$ называется *пределом последовательности функций промежутка* $F_n(\sigma)$ $(n = 1, 2, ...)$, если для каждого фиксированного частичного промежутка σ последовательность чисел $F_n(\sigma)$ $(n = 1, 2, ...)$ имеет своим пределом число $F(\sigma)$.

Теорема 1.3. *Предел последовательности аддитивных функций промежутка есть также аддитивная функция промежутка.*

Доказательство. Пусть $F_n(\sigma)$ — последовательность аддитивных функций промежутка и $F(\sigma) = \lim F_n(\sigma)$. Предположим, что $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ (σ_1 и σ_2 — промежутки без общих точек). Тогда

$$F(\sigma) = F(\sigma_1 + \sigma_2) = \lim F_n(\sigma_1 + \sigma_2) =$$
$$= \lim [F_n(\sigma_1) + F_n(\sigma_2)] = \lim F_n(\sigma_1) +$$
$$+ \lim F_n(\sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2),$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Непрерывные аддитивные функции промежутка

Аддитивная функция $F(\sigma)$ называется *непрерывной*, если ее значение на любом одноточечном частичном промежутке основного промежутка Ω равно нулю, т. е. если для любой точки $\alpha \in \Omega$ имеем $F([\alpha, \alpha]) = 0$.

Рассмотренные в предыдущем параграфе функции $l(\sigma)$ и $S(\sigma)$, очевидно, непрерывны.

Приведем примеры разрывных аддитивных функций промежутка.

Пример 1. Функция $E_c(\sigma)$, определенная следующим образом:

$$E_c(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \text{ не содержит точку } c, \\ 1, & \text{если } \sigma \text{ содержит точку } c, \end{cases}$$

называется *единичной функцией промежутка с носителем c*. Она описывает распределение единичной массы, сосредоточенной в точке c.

Покажем сначала, что $E_c(\sigma)$ — аддитивная функция промежутка σ. Пусть $c \in \sigma$. Тогда из двух частичных промежутков σ_1 и σ_2, не имеющих общих точек, и таких, что $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, только один, например σ_1, содержит точку c. Поэтому $E_c(\sigma_1) = 1$, $E_c(\sigma_2) = 0$, $E_c(\sigma) = 1$ и, следовательно,

$$E_c(\sigma) = E_c(\sigma_1) + E_c(\sigma_2).$$

При $c \notin \sigma$ это равенство очевидно, так как все его члены равны нулю. Поскольку $E_c([c, c]) = 1$, то функция $E_c(\sigma)$ разрывна.

Отметим, что

$$E_c([x, x]) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq c, \\ 1 & \text{при } x = c. \end{cases} \tag{1.3}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$m(\sigma; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k E_{x_k}(\sigma),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — какие-либо точки, а $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — положительные числа. Эта функция описывает распределение масс, сосредоточенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Как линейная комбинация аддитивных функций $E_{x_k}(\sigma)$, функция $m(\sigma; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ также аддитивна.

В силу равенства (1.3) имеем

$$m([x_j, x_j], x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k E_{x_k}([x_j, x_j]) = m_j.$$

Таким образом, функция $m(\sigma;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ разрывна.

Теорема 1.4. *Линейная комбинация непрерывных аддитивных функций промежутка есть также непрерывная аддитивная функция промежутка.*

Доказательство. Пусть

$$F(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(\sigma),$$

где $F_k(\sigma)$ — непрерывные аддитивные функции промежутка. В предыдущем параграфе было доказано, что $F(\sigma)$ является аддитивной функцией. Покажем, что она непрерывна.

Так как функции $F_k(\sigma)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ непрерывны, то для любой точки α основного промежутка Ω имеем

$$F([\alpha, \alpha]) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k([\alpha, \alpha]) = 0.$$

Следовательно, функция $F(\sigma)$ также непрерывна.

Теорема 1.5. *Предел последовательности непрерывных аддитивных функций промежутка есть также непрерывная аддитивная функция промежутка.*

Доказательство. Пусть $F_n(\sigma)$ — последовательность непрерывных аддитивных функций промежутка и $F(\sigma) = \lim F_n(\sigma)$. В предыдущем параграфе было показано, что $F(\sigma)$ — аддитивная функция. Далее, так как $F_n(\sigma)$ — непрерывные функции, то для любой точки $\alpha \in \Omega$ имеем

$$F([\alpha,\ \alpha]) = \lim F_n([\alpha,\ \alpha]) = \lim 0 = 0.$$

Следовательно, функция $F(\sigma)$ также непрерывна.

В дальнейшем будем считать, что *основной промежуток замкнут и рассматривать только непрерывные аддитивные функции промежутка.* В силу принятого условия, значения аддитивной функции на произвольных частичных промежутках любого вида (замкнутых, открытых или полуоткрытых) одинаковы, если совпадают концы этих промежутков. Это позволяет несколько ослабить определение аддитивности функции промежутка, а именно: *функцию* $F(\sigma)$ *промежутка* σ *считать аддитивной, если при разбиении* σ *на два частичных промежутка* σ_1 *и* σ_2, *не имеющих общих внутренних точек, справедливо равенство* (1.1).

§ 5. Плотность аддитивной функции промежутка

Будем считать, что переменный частичный промежуток σ *стягивается в точке* x, если $x \in \sigma$ и если длина $l(\sigma)$ промежутка σ стремится к нулю.

Число p называется *плотностью аддитивной функции промежутка* $F(\sigma)$ *в точке* $x \in \Omega$, если для любого переменного промежутка σ, стягивающегося к точке x, справедливо равенство

$$\lim \frac{F(\sigma)}{l(\sigma)} = p. \tag{1.4}$$

Аддитивную функцию промежутка, имеющую в точке x плотность, будем называть *дифференцируемой в этой точке*. Аддитивная функция промежутка называется *просто дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой точке основного промежутка Ω. В этом случае плотность аддитивной функции промежутка является функцией точки x, определенной в промежутке Ω:

$$p = p(x), \quad x \in \Omega.$$

Понятие плотности аддитивной функции промежутка аналогично понятию производной функции точки. Поэтому для плотности $p(x)$ аддитивной функции $F(\sigma)$ промежутка σ будем применять обозначения

$$p(x) = \frac{dF(\sigma)}{dl(\sigma)} = \frac{dF}{dl} \quad (x \in \sigma).$$

Многие свойства производной функции точки и плотности аддитивной функции промежутка сходны. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Плотность линейной комбинации аддитивных функций промежутка равна линейной комбинации плотностей этих функций с теми же коэффициентами:*

$$\frac{d}{dl} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{dF_k}{dl}. \tag{1.5}$$

§ 6. Условие знакопостоянства дифференцируемой аддитивной функции промежутка

Теорема 1.7. *Плотность $p(x)$ неотрицательной дифференцируемой аддитивной функции промежутка $F(\sigma)$ также неотрицательна.*

Доказательство. Пусть частичный промежуток σ стягивается к точке x. Так как $F(\sigma) \geqslant 0$, то и $\frac{F(\sigma)}{l(\sigma)} \geqslant 0$. Следовательно,

$$p(x) = \lim \frac{F(\sigma)}{l(\sigma)} \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.8. *Если основной промежуток Ω ограничен, то аддитивная функция промежутка $F(\sigma)$ с неотрицательной плотностью $p(x)$ также неотрицательна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е. что существует такой частичный промежуток σ_0, для которого $F(\sigma_0) < 0$. Так как мы условились рассматривать только непрерывные аддитивные функции, то можно считать промежуток σ_0 замкнутым.

Разобьем промежуток σ_0 на два равных по длине замкнутых промежутка σ' и σ'' без общих внутренних точек. Докажем справедливость хотя бы одного из неравенств

$$\frac{F(\sigma')}{l(\sigma')} \leqslant \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)} \text{ или } \frac{F(\sigma'')}{l(\sigma'')} \leqslant \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)}. \tag{1.6}$$

В самом деле, если оба неравенства не выполняются, то

$$F(\sigma') > \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)} l(\sigma'), \quad F(\sigma'') > \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)} l(\sigma'')$$

и, следовательно, мы бы имели

$$F(\sigma_0) = F(\sigma') + F(\sigma'') > \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)} [l(\sigma') + l(\sigma'')] =$$

$$= \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)} l(\sigma_0) = F(\sigma_0).$$

Обозначим через σ_1 тот из промежутков σ' и σ'', для которого справедливо неравенство (1.6). Таким образом,

$$\frac{F(\sigma_1)}{l(\sigma_1)} \leqslant \frac{F(\sigma_0)}{l(\sigma_0)}, \quad l(\sigma_1) = \frac{l(\sigma_0)}{2}.$$

С промежутком σ_1 поступаем точно так же, как и с промежутком σ_0. В результате определится замкнутый промежуток σ_2, вложенный в промежуток σ_1, такой, что

$$\frac{F(\sigma_2)}{l(\sigma_2)} \leqslant \frac{F(\sigma_1)}{l(\sigma_1)}, \quad l(\sigma_2) = \frac{l(\sigma_1)}{2} = \frac{l(\sigma_0)}{2^2}.$$

Процесс деления можно продолжать неограниченно. В результате получится последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ вложенных замкнутых промежутков, последовательность длин которых

$$l(\sigma_n) = \frac{l(\sigma_0)}{2^n} \to 0,$$

причем последовательность $\frac{F(\sigma_n)}{l(\sigma_n)}$ отрицательная и невозрастающая. По известной теореме о стягивающейся последовательности замкнутых промежутков существует одна и только одна точка x_0, к которой последовательность $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ стягивается. Поэтому имеем

$$\lim \frac{F(\sigma_n)}{l(\sigma_n)} = p(x_0) \geqslant 0,$$

что невозможно, так как последовательность $\frac{F(\sigma_n)}{l(\sigma_n)}$ отрицательная и невозрастающая.

Аналогично доказываются следующие предложения.

Теорема 1.9. *Плотность неположительной дифференцируемой аддитивной функции промежутка также неположительна.*

Теорема 1.10. *Если основной промежуток Ω ограниченный, то аддитивная функция промежутка с неположительной плотностью также неположительна.*

Простым следствием теорем 1.8 и 1.10 является следующая теорема единственности аддитивной функции промежутка.

Теорема 1.11. *Если основной промежуток Ω ограничен, то не существует более одной аддитивной функции промежутка с данной плотностью $p(x)$.*

Доказательство. Допустим, что $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ — две аддитивные функции промежутка, имеющие одинаковую плотность $p(x)$:

$$\frac{dF_1}{dl} = \frac{dF_2}{dl} = p(x).$$

Тогда аддитивная функция промежутка $\omega(\sigma) =$

$=F_1(\sigma)-F_2(\sigma)$ имеет плотность, тождественно равную нулю. Из теоремы 1.8 следует, что $\omega(\sigma)\geqslant 0$, а из теоремы 1.10, что $\omega(\sigma)\leqslant 0$. Поэтому $\omega(\sigma)=0$ и, следовательно, $F_1(\sigma)=F_2(\sigma)$.

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Понятие об определенном интеграле. Теорема существования

Пусть основной промежуток Ω замкнут и ограничен. *Определенным интегралом от заданной на Ω функции точки $f(x)$ называется аддитивная функция $F(\sigma)$ промежутка $\sigma=<\alpha, \beta>$, плотность которой равна $f(x)$.* Для определенного интеграла применяются следующие обозначения:

$$F(\sigma)=F(<\alpha, \beta>)=\int_{\sigma} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \qquad (2.1)$$

В формуле (2.1) символ $\int$ является знаком интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, σ — промежуток интегрирования, α — нижний предел интеграла, β — верхний предел интеграла.

Из теоремы 1.11 следует единственность определенного интеграла от заданной функции точки $f(x)$. Не для всякой функции $f(x)$ существует определенный интеграл. Функция $f(x)$, для которой существует определенный интеграл, называется *интегрируемой* по промежутку Ω.

Ниже будет доказано, что непрерывная функция интегрируема. Поэтому, чтобы не усложнять изложение, будем в дальнейшем всегда считать, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна.

Теорема 2.1. *Функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом ограниченном промежутке Ω, интегрируема по этому промежутку.*

Доказательство. Разобьем промежуток Ω на 2^n равных по длине замкнутых промежутков $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^n}$ без общих внутренних точек:

$$\Omega=\sum_{k=1}^{2^n}\omega_k, \quad l(\omega_k)=\frac{l(\Omega)}{2^n}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{2^n} m_k\, l(\sigma\omega_k),$$

где m_k — наименьшее значение фукции $f(x)$ на промежутке ω_k*; $\sigma\omega_k$ — общая часть промежутков σ и ω_k.

Рассмотрим свойства функций $F_n(\sigma)$.

Свойство 1. *Функция* $F_n(\sigma)$ *аддитивна.* Пусть $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$, причем промежутки σ_1 и σ_2 не имеют общих точек. Тогда, в силу аддитивности длины промежутка, имеем

$$l(\sigma\omega_k) = l((\sigma_1+\sigma_2)\,\omega_k) = l(\sigma_1\omega_k+\sigma_2\omega_k) =$$
$$= l(\sigma_1\omega_k) + l(\sigma_2\omega_k).$$

Следовательно, функция $l(\sigma\omega_k)$ аддитивна. Функция $F_n(\sigma)$ является линейной комбинацией функций $l(\sigma\omega_k)$ и поэтому также аддитивна.

Свойство 2. *Последовательность* $F_n(\sigma)$ *не убывает*. Процесс перехода от $F_n(\sigma)$ к $F_{n+1}(\sigma)$ состоит в делении каждого промежутка ω_k на два равных по длине промежутка ω_k' и ω_k''. Если обозначить через m_k' и m_k'' наименьшие значения функции $f(x)$ на промежутках ω_k' и ω_k'' соответственно, то получим

$$m_k \leqslant m_k', \quad m_k \leqslant m_k'',$$

так как с сужением промежутка наименьшее значение функции может только расти. Поэтому

$$F_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=1}^{2^n} \left[m_k'\, l\left(\sigma\omega_k'\right) + m_k''\, l\left(\sigma\omega_k''\right)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{2^n} \left[m_k\, l\left(\sigma\omega_k'\right) + m_k\, l\left(\sigma\omega_k''\right)\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{2^n} m_k \left[l\left(\sigma\omega_k'\right) + l\left(\sigma\omega_k''\right)\right] = \sum_{k=1}^{2^n} m_k\, l\left(\sigma\omega_k\right) = F_n(\sigma),$$

что и требовалось доказать.

---

* Как известно, функция, непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке, принимает на этом промежутке как наименьшее, так и наибольшее значение.

2—858

Свойство 3. *Последовательность* $F_n(\sigma)$ *ограничена сверху.* Обозначим через M наибольшее значение функции $f(x)$ на промежутке Ω. Из соотношений

$$F_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{2^n} m_k\, l(\sigma\omega_k) \leqslant M \sum_{k=1}^{2^n} l(\sigma\omega_k) = Ml(\sigma\Omega) = Ml(\sigma)$$

следует, что последовательность $F_n(\sigma)$ действительно ограничена сверху.

Как известно, ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел. Поэтому существует функция

$$F(\sigma) = \lim F_n(\sigma),$$

которая аддитивна как предел последовательности аддитивных функций. Покажем, что функция $F(\sigma)$ является определенным интегралом от функции $f(x)$, т. е., что

$$\frac{dF}{dl} = f(x). \tag{2.2}$$

Пусть x — произвольная точка промежутка Ω и σ — частичный промежуток, содержащий точку x. Имеем

$$l(\sigma) = \sum_{k=1}^{2^n} l(\sigma\omega_k).$$

Поэтому

$$f(x)\, l(\sigma) - F_n(\sigma) = f(x) \sum_{k=1}^{2^n} l(\sigma\omega_k) - \sum_{k=1}^{2^n} m_k\, l(\sigma\omega_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} [f(x) - m_k]\, l(\sigma\omega_k). \tag{2.3}$$

Следует отметить, что выражение $l(\sigma\omega_k)$ отлично от нуля только для тех промежутков ω_k, которые имеют с промежутком σ общие внутренние точки. При этом только два из них могут не принадлежать целиком промежутку σ. Обозначим их через ω' и ω''. Тогда равенство (2.3) можно записать в виде

$$f(x)\, l(\sigma) - F_n(\sigma) = \sum_{\omega_k \subset \sigma} [f(x) - m_k]\, l(\sigma\omega_k) +$$

$$+ [f(x) - m']\, l(\sigma\omega') + [f(x) - m'']\, l(\sigma\omega''),$$

где m' и m'' наименьшие значения функции $f(x)$ на промежутках ω' и ω'' соответственно. Отсюда следует, что

$$|f(x)\,l(\sigma) - F_n(\sigma)| \leqslant \sum_{\omega_k \subset \sigma} |f(x) - m_k|\, l(\sigma\omega_k) +$$

$$+ |f(x) - m'|\, l(\sigma\omega') + |f(x) - m''|\, l(\sigma\omega'') \leqslant$$

$$\leqslant [M(\sigma) - m(\sigma)] \sum_{\omega_k \subset \sigma} l(\sigma\omega_k) + |f(x) - m'|\, l(\sigma\omega') +$$

$$+ |f(x) - m''|\, l(\sigma\omega''),$$

где $M(\sigma)$ и $m(\sigma)$ — наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на промежутке σ. Так как

$$\sum_{\omega_k \subset \sigma} l(\sigma\omega_k) \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} l(\sigma\omega_k) = l(\sigma), \quad l(\sigma\omega') \leqslant l(\omega') = \frac{l(\Omega)}{2^n},$$

$$l(\sigma\omega'') \leqslant l(\omega'') = \frac{l(\Omega)}{2^n},$$

то имеем

$$|f(x)\,l(\sigma) - F_n(\sigma)| \leqslant [M(\sigma) - m(\sigma)]\, l(\sigma) +$$

$$+ |f(x) - m'|\, \frac{l(\Omega)}{2^n} + |f(x) - m''|\, \frac{l(\Omega)}{2^n}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим:

$$|f(x)\,l(\sigma) - F(\sigma)| \leqslant [M(\sigma) - m(\sigma)]\, l(\sigma).$$

Разделим последнее неравенство на $l(\sigma)$:

$$\left|\frac{F(\sigma)}{l(\sigma)} - f(x)\right| \leqslant M(\sigma) - m(\sigma). \qquad (2.4)$$

В силу непрерывности $f(x)$ имеем

$$\lim_{l(\sigma) \to 0} m(\sigma) = \lim_{l(\sigma) \to 0} M(\sigma) = f(x).$$

Поэтому из неравенства (2.4) следует, что

$$\lim \frac{F(\sigma)}{l(\sigma)} = f(x),$$

т. е. равенство (2.2). Теорема доказана.

§ 2. Распространение аддитивной функции и определенного интеграла на отрицательные промежутки

До настоящего параграфа считалось, что для промежутка $\sigma = <\alpha, \beta>$ всегда $\alpha \leqslant \beta$. В дальнейшем не будем придерживаться этого ограничения. Иными словами, для промежутка $\sigma = <\alpha, \beta>$ может быть $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ и $\alpha > \beta$. В первом случае промежуток σ называется *положительным*, во втором — *нулевым*, а в третьем — *отрицательным*. При этом точка α называется *началом промежутка* σ, а точка β — его *концом*.

Выше приводилось определение аддитивной функции неотрицательного промежутка. Распространим это определение на множество $B(\Omega)$ всех (положительных, отрицательных и нулевых) частичных промежутков промежутка Ω.

Функция $F(\sigma)$, *определенная на множестве* $B(\Omega)$, *называется аддитивной, если для любых трех точек* α, β, γ *основного промежутка* Ω *справедливо равенство*

$$F(<\alpha, \beta>) = F(<\alpha, \gamma>) + F(<\gamma, \beta>). \qquad (2.5)$$

Пример 1. Функция $\tilde{l}(\sigma) = \tilde{l}(<\alpha, \beta>) = \beta - \alpha$ (называемая величиной промежутка σ) является аддитивной. В самом деле,

$$\tilde{l}(<\alpha, \beta>) = \beta - \alpha = (\gamma - \alpha) + (\beta - \gamma) =$$

$$= \tilde{l}(<\alpha, \gamma>) + \tilde{l}(<\gamma, \beta>).$$

Пример 2. Пусть $\Phi(x)$ — функция точки x, определенная на промежутке Ω. Тогда функция $F(<\alpha, \beta>) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ является аддитивной. Доказательство этого предложения аналогично доказательству, проведенному в примере 1.

Теорема 2.2. *Для того чтобы определенная на множестве* $B(\Omega)$ *всех частичных промежутков промежутка* Ω *функция* $F(\sigma)$ *была аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. *Функция* $F(\sigma)$ *была аддитивной на множестве* $A(\Omega)$ *неотрицательных частичных промежутков промежутка* Ω;

2. *Для любых точек* α *и* β *промежутка* Ω *было справедливо равенство*

$$F(<\alpha, \beta>) = -F(<\beta, \alpha>). \qquad (2.6)$$

Доказательство. Пусть сначала функция $F(\sigma)$ аддитивна на множестве $B(\Omega)$. Тогда для любых трех точек α, β, γ выполняется равенство (2.5). В частности, оно справедливо для $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, что означает аддитивность функции $F(\sigma)$ на множестве $A(\Omega)$. Полагая в равенстве (2.5) $\alpha = \beta$ и учитывая, что $F(<\alpha, \alpha>) = 0$, имеем

$$0 = F(<\alpha, \gamma>) + F(<\gamma, \alpha>).$$

Полученное равенство аналогично равенству (2.6), с той лишь разницей, что β заменено на γ.

Пусть теперь функция $F(\sigma)$ удовлетворяет условиям 1 и 2. Тогда для нее справедливо равенство (2.5) при $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, так как в этом случае промежутки $<\alpha, \beta>$, $<\alpha, \gamma>$ и $<\gamma, \beta>$ неотрицательны.

Предположим теперь, что точка γ лежит вне промежутка $<\alpha, \beta>$, например, $\alpha \leqslant \beta < \gamma$. Тогда, в силу неотрицательности промежутков $<\alpha, \gamma>$, $<\alpha, \beta>$ и $<\beta, \gamma>$,

$$F(<\alpha, \gamma>) = F(<\alpha, \beta>) + F(<\beta, \gamma>).$$

Отсюда, в силу равенства (2.6), имеем

$$F(<\alpha, \beta>) = F(<\alpha, \gamma>) - F(<\beta, \gamma>) = \\ = F(<\alpha, \gamma>) + F(<\gamma, \beta>).$$

Полученное равенство аналогично равенству (2.5).

Точно так же доказывается справедливость равенства (2.5) для других случаев взаимного расположения точек α, β, γ.

Доказанная теорема позволяет распространить аддитивную на множестве неотрицательных промежутков функцию $F(\sigma)$ на множество всех промежутков с сохранением аддитивности. Такое распространение производится при $\alpha \geqslant \beta$ с помощью равенства (2.6).

В частности, с помощью равенства

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (2.7)$$

определенный интеграл распространяется на множестве всех промежутков.

В дальнейшем будем считать такое распространение уже произведенным и *рассматривать определенный интеграл как аддитивную функцию, заданную на множестве всех промежутков и имеющую плотность, равную подынтегральной функции.*

Используя теорему 2.2, можно по формуле (1.4) для плотности аддитивной функции промежутка получить, что при стягивании промежутка σ к точке x

$$\lim \frac{F(\sigma)}{\tilde{l}(\sigma)} = \lim \frac{F(<\alpha, \beta>)}{\beta - \alpha} = p(x). \tag{2.8}$$

§ 3. Свойства определенного интеграла

Приведем свойства определенного интеграла, являющиеся непосредственными следствиями его аддитивности.

1. *Определенный интеграл от линейной комбинации функций точки равен линейной комбинации определенных интегралов от этих функций с теми же коэффициентами:*

$$\int_{\sigma} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\sigma} f_k(x)\, dx. \tag{2.9}$$

Доказательство. По определению определенного интеграла левая часть этого равенства есть аддитивная функция промежутка, причем

$$\frac{d}{dl} \int_{\sigma} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x).$$

Правая часть равенства (2.9) также является аддитивной функцией промежутка, причем

$$\frac{d}{dl} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\sigma} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{d}{dl} \int_{\sigma} f_k(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x).$$

Таким образом, обе части равенства (2.9) являются аддитивными функциями с одинаковыми плотностями. По теореме единственности они равны.

2. *При перестановке верхнего и нижнего пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный*

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\, dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx. \tag{2.10}$$

3. *Для любых трех точек α, β, γ основного промежутка Ω справедливо равенство*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx. \qquad (2.11)$$

§ 4. Существование первообразной функции для непрерывной функции

В дальнейшем букву x в определенном интеграле $\int\limits_{\sigma} f(x)dx$ будем называть *переменной интегрирования*. Так как величина интеграла есть функция промежутка σ, то переменную интегрирования можно обозначать любой буквой, например t:

$$\int_{\sigma} f(t)\,dt = \int_{\sigma} f(x)\,dx.$$

Докажем следующее предложение.

Теорема 2.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в основном промежутке Ω, то она имеет на этом промежутке первообразную функцию $\Phi(x)$, т. е. такую что*

$$\Phi'(x) = f(x). \qquad (2.12)$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то существует определенный интеграл

$$F(\sigma) = \int_{\sigma} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt \quad (\sigma = <\alpha, \beta>).$$

Рассмотрим функцию точки x:

$$\Phi(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt,$$

называемую *интегралом с переменным верхним пределом*. По третьему свойству интеграла

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_{\alpha}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Величина промежутка $\sigma = [x, x+\Delta x]$ равна Δx. Так как плотность интеграла равна подынтегральной функции, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dl}\int_{\sigma} f(t)\,dt = f(x). \qquad (2.13)$$

Таким образом, для интеграла с переменным верхним пределом доказана справедливость формулы (2.12), следовательно этот интеграл является первообразной для функции $f(x)$.

Отметим, что существование первообразной для функции $f(x)$ означает существование неопределенного интеграла $\int f(x)\,dx$.

§ 5. Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 2.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в основном промежутке Ω, то справедлива формула Ньютона—Лейбница*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{2.14}$$

где $\Phi(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$.

Доказательство. В обеих частях равенства (2.14) находятся аддитивные функции промежутка $\sigma = \langle\alpha, \beta\rangle$. Поэтому для доказательства справедливости этого равенства достаточно убедиться в том, что обе эти аддитивные функции имеют одинаковую плотность. По определению интеграла имеем

$$\frac{d}{dl}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(x).$$

Применяя формулу конечных приращений, получим

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \Phi'(c)(\beta - \alpha) = f(c)(\beta - \alpha),$$

где c — точка, принадлежащая интервалу $\sigma = (\alpha, \beta)$. Пусть теперь $x \in \sigma$. Тогда, поскольку функция $f(x)$ в точке x непрерывна, имеем

$$\frac{d}{dl}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] = \lim_{l(\sigma)\to 0} \frac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dl}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{d}{dl}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] = f(x).$$

Теорема доказана.

Выражение $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, равное приращению функции $\Phi(x)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$, обозначается символом

$\Phi(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}$. Тогда формулу Ньютона—Лейбница можно записать следующим образом:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}. \tag{2.15}$$

Например, функция $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^3$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$. Поэтому

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

§ 6. Замена переменной интегрирования (подстановка) в определенном интеграле

Теорема 2.5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в основном промежутке Ω оси Ox, а функция $x=\varphi(t)$ определена в замкнутом промежутке H оси T и, кроме того:*

1) при $t \in H$ *значение функции* $x=\varphi(t) \in \Omega$;

2) *функция $\varphi(t)$ имеет в промежутке H непрерывную производную $\varphi'(t)$.*

Тогда для любых точек α и β промежутка H справедливо равенство

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2.16}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(t) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{x} f(x)\,dx.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\Phi'(t) = \Big(\int_{\varphi(\alpha)}^{x} f(x)\,dx\Big)'_x \cdot x'_t = f(x)\cdot x'_t = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Справедливость формулы (2.16) доказана.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Применим подстановку $x=a\sin t$. Так как $x|_{t=0}=0$, $x|_{t=\pi/2}=a$, то

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt =$$

$$= a^2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}a^2.$$

§ 7. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные в промежутке Ω. Тогда функция $\Phi(x)=$ $=u(x)v(x)$ является первообразной для своей производной

$$\Phi'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Поэтому по формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]\,dx = u(x)v(x)\Big|_\alpha^\beta,$$

откуда

$$\int\limits_\alpha^\beta u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta v(x)u'(x)\,dx.$$

Учитывая, что $v'(x)dx=dv$, $u'(x)dx=du$, можно полученную формулу записать так:

$$\int\limits_\alpha^\beta udv=uv\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta vdu. \qquad (2.17)$$

Это и есть *формула интегрирования по частям* в определенном интеграле.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x+1)e^{-x}dx$.

Решение. Внесем e^{-x} под знак дифференциала и воспользуемся формулой интегрирования по частям. Тогда имеем

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx = -\int_0^1 (x+1)\,de^{-x} = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^1 +$$

$$+\int_0^1 e^{-x}\,d(x+1) = -2e^{-1}+1+\int_0^1 e^{-x}\,dx =$$

$$= -2e^{-1}+1-e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1}+1-e^{-1}+1 = 2-\frac{3}{e}.$$

§ 8. Основные неравенства для определенного интеграла

Теорема 2.6. *Если $f(x) \geqslant g(x)$ и промежуток σ неотрицательный, то*

$$\int_\sigma f(x)\,dx \geqslant \int_\sigma g(x)\,dx. \qquad (2.18)$$

Доказательство. Положим $\omega(x) = f(x) - g(x)$. По теореме 1.8, учитывая, что плотность интеграла $\omega(x) \geqslant 0$, имеем

$$\int_\sigma \omega(x)\,dx \geqslant 0.$$

Или, иначе,

$$\int_\sigma [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (2.18).

Очевидно, что для отрицательного промежутка σ знак неравенства в (2.18) изменится на противоположный.

Теорема 2.7. *Справедливо неравенство*

$$\left|\int_\sigma f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_\sigma |f(x)|\,dx\right|. \qquad (2.19)$$

Доказательство. Предположим сначала, что промежуток неотрицательный. Так как $f(x) \leqslant |f(x)|$ и $-f(x) \leqslant |f(x)|$, то по теореме 2.6

$$\int_\sigma f(x)\,dx \leqslant \int_\sigma |f(x)|\,dx, \quad -\int_\sigma f(x)\,dx = \int_\sigma (-f(x))\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\sigma |f(x)|\,dx.$$

Так как $\int\limits_\sigma f(x)\,dx$ и $\int\limits_\sigma -f(x)\,dx$ отличаются только знаком, а $\int\limits_\sigma |f(x)|\,dx$ неотрицательный, то последние неравенства равносильны соотношению

$$\left|\int\limits_\sigma f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_\sigma |f(x)|\,dx = \left|\int\limits_\sigma |f(x)|\,dx\right|.$$

Таким образом, для неотрицательного промежутка справедливость неравенства (2.19) доказана.

Для отрицательного промежутка σ неравенство (2.19) получается изменением знаков перед интегралами, что не меняет их абсолютных величин.

§ 9. Теорема о среднем значении функции точки

Выражение

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

называется *средним значением функции $f(x)$ на промежутке $<\alpha, \beta>$.*

Теорема 2.8. *Среднее значение на промежутке $<\alpha, \beta>$ непрерывной функции равно ее значению в некоторой внутренней точке этого промежутка.*

Приведем два доказательства этой теоремы.

Доказательство 1. Пусть $\Phi(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница и формулу конечных приращений, получаем:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\Phi(\beta)-\Phi(\beta)}{\beta-\alpha} = \Phi'(c) = f(c), \quad (2.20)$$

где c — точка интервала (α, β). Именно это равенство нам и требовалось доказать.

Доказательство 2. Пусть сначала $\alpha<\beta$. Без ограничения общности можно считать промежуток интегрирования замкнутым. Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке $[\alpha, \beta]$. При $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ имеем

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

Применяя теорему 2.6, получаем:

$$m(\beta-\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} M dx = M(\beta-\alpha).$$

Отсюда

$$m \leqslant \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leqslant M.$$

Для непрерывных функций любое число, заключенное между двумя значениями функции, есть также значение функции в точке, лежащей между соответствующими значениями аргумента.

Итак, доказано, что среднее значение функции заключено между наименьшим и наибольшим значениями функции на промежутке $[\alpha, \beta]$. Поэтому справедливо равенство (2.20), где c — точка интервала (α, β).

Пусть теперь $\alpha>\beta$. Применяя равенство (2.20) к положительному промежутку $[\beta, \alpha]$, получаем

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\frac{1}{\alpha-\beta}\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx=f(c),$$

где точка c лежит между α и β. Теорема доказана полностью.

§ 10. Интегральные суммы и их предел

Рассмотрим в промежутке Ω ограниченную функцию $f(x)$. Пусть $\sigma=[\alpha, \beta]$ — замкнутый частичный промежуток промежутка Ω. Разобьем промежуток σ на n частей с помощью точек деления $x_0=\alpha$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n=\beta$. Нумерация точек производится от начала промежутка α к его концу β. Таким образом, для положительного промежутка нумерация производится слева направо, а для отрицательного — справа налево (рис. 4). Точки деления разбивают промежуток σ на n частичных промежутков $\sigma_k=[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, ..., n)$. Выражение

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\,\Delta x_k,$$

где η_k — произвольная точка промежутка σ_k и $\Delta x_k= =x_k-x_{k-1}$ — величина промежутка σ_k, называется *ин-*

тегральной *суммой* или *суммой Римана* для функции $f(x)$ по промежутку σ.

Число $I=I(\sigma)$ *называется пределом интегральных сумм* S, *если для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что из неравенства* $\lambda=\max|\Delta x_k|<\delta$ *следует неравенство*

$$|S-I|<\varepsilon. \tag{2.21}$$

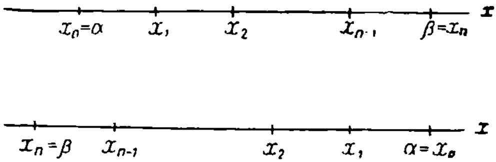

Рис. 4

Теорема 2.9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* Ω, *то для любого его замкнутого частичного промежутка* σ *справедливо равенство*

$$\lim S=\lim\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\,\Delta x_k=\int_\sigma f(x)\,dx. \tag{2.22}$$

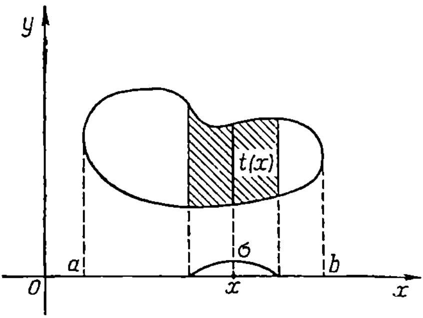

Рис. 5

Доказательство. При доказательстве этого предложения используется следующая теорема Кантора: *если функция* $f(x)$ *непрерывна в замкнутом ограниченном промежутке* σ, *то для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что из неравенства* $|x'-x''|<\delta$ *следует неравенство* $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ (x' и $x''\in\sigma$).

Пусть ε — произвольное положительное число. По теореме Кантора можно найти $\delta>0$ такое, что для всех точек x' и x'' промежутка σ, расстояние между которыми меньше δ, справедливо неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{l(\sigma)}. \tag{2.23}$$

Выберем теперь точки деления x_k ($k=0, 1, ..., n$) так, чтобы $|\Delta x_k| < \delta$. Тогда расстояние между двумя любыми точками любого частичного промежутка σ_k будет и подавно меньше δ, следовательно, для значений функции в этих точках справедливо неравенство (2.23).

Из аддитивности интеграла и теоремы о среднем значении функции следует, что

$$\int_\sigma f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k,$$

где c_k — точка промежутка σ_k. Отсюда, так как $\sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| =$

$= \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k) = l(\sigma)$, имеем

$$\left| S - \int_\sigma f(x)\,dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\,\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} [f(\eta_k) - f(c_k)]\,\Delta x_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\eta_k) -$$

$$- f(c_k)|\,|\Delta x_k| < \frac{\varepsilon}{l(\sigma)} \sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| = \varepsilon.$$

Таким образом, справедливость равенства (2.22) установлена и теорема доказана.

ГЛАВА III

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

Найдем площадь S фигуры, расположенной в плоскости xOy, проекцией которой на ось Ox является промежуток $\Omega = [a, b]$ (рис. 5). Обозначим через $S(\sigma)$ площадь части фигуры, лежащей над частичным промежутком σ промежутка Ω. Очевидно, что $S(\sigma)$ есть аддитивная функция промежутка σ и что $S=S(\Omega)$.

Пересечем фигуру прямой, параллельной оси Oy и проходящей через произвольную точку x промежутка Ω. Допустим, что известна длина $t(x)$ поперечного сечения фигуры, и предположим, что эта функция непрерывна. Так как значение функции $S(\sigma)$ на одноточечном промежутке равно нулю, то можно считать σ замкнутым промежутком.

Обозначим через $m(\sigma)$ и $M(\sigma)$ наименьшее и наибольшее значения функции $t(x)$ на промежутке σ. Очевидно, что площадь $S(\sigma)$ заключена между площадями прямоугольников с основаниями $l(\sigma)$, высотами $m(\sigma)$ и $M(\sigma)$, т. е.

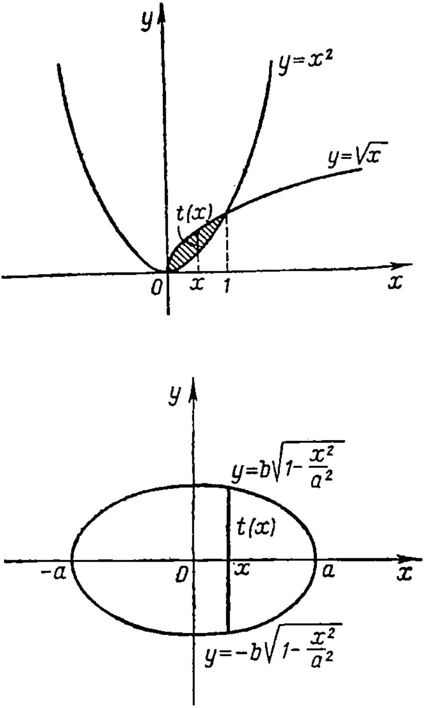

Рис. 7

$$m(\sigma)\, l(\sigma) \leqslant S(\sigma) \leqslant M(\sigma)\, l(\sigma).$$

Пусть теперь промежуток σ стягивается к точке x. Так как $t(x)$ — непрерывная функция, то в этом случае $m(\sigma) \to t(x)$ и $M(\sigma) \to t(x)$. Поэтому

$$\frac{dS}{dl} = \lim \frac{S(\sigma)}{l(\sigma)} = t(x).$$

Отсюда следует, что

$$S(\sigma) = \int_\sigma t(x)\, dx. \tag{3.1}$$

В частности,

$$S=\int_{\Omega} t(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ (рис. 6).

Решение. Так как фигура проектируется на отрезок $\Omega=[0, 1]$ и длина ее поперечного сечения $t(x)=\sqrt{x}-x^2$, то

$$S=\int_0^1 t(x)\,dx=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

Решение. Направим оси прямоугольной системы координат по осям эллипса (рис. 7). В выбранной системе координат уравнение эллипса является каноническим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Знак «+» берется для верхней половины эллипса, знак «—» — для нижней половины эллипса.

В нашем случае $t(x)=2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $\Omega=[-a, a]$, поэтому

$$S=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Воспользуемся подстановкой $x=a\sin t$. Тогда $dx=a\cos t\,dt$ и при $x=-a$ имеем $t=-\pi/2$, при $x=a$ имеем $t=\pi/2$. Следовательно,

$$S = 2ab\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 2ab\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= ab\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab.$$

§ 2. Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Рассмотрим на полярной плоскости r, φ плоскую фигуру, ограниченную лучами $\varphi=a$, $\varphi=b$ $(a<b)$ и непрерывной линией $r=r(\varphi)$ (рис. 8). Такую фигуру принято называть *сектором*. Если $r=r(\varphi)=R$, то сектор являет-

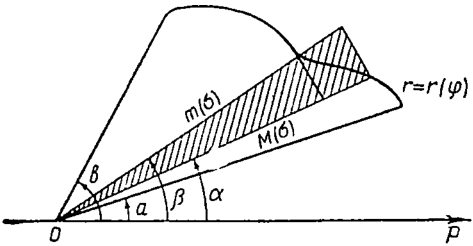

Рис. 8

ся круговым и его площадь $S_{\text{кр}}$, как известно, вычисляется по формуле

$$S_{\text{кр}} = \frac{1}{2}R^2(b-a).$$

Найдем площадь S произвольного сектора. Обозначим через $S(\sigma)$ $(\sigma=[\alpha, \beta])$ площадь части сектора, ограниченную лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$. Очевидно, что $S(\sigma)$ — аддитивная функция промежутка σ и что $S=S(\Omega)$ $(\Omega=[a, b])$.

Пусть $m(\sigma)$ и $M(\sigma)$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения радиуса $r(\varphi)$ на промежутке σ. Очевидно, что площадь $S(\sigma)$ заключена между площадями круговых секторов с радиусами $m(\sigma)$ и $M(\sigma)$ и с раствором $\beta-\alpha$. Иначе,

$$\frac{1}{2}m(\sigma)^2(\beta-\alpha)\leqslant S(\sigma)\leqslant\frac{1}{2}M(\sigma)^2(\beta-\alpha).$$

Пусть теперь промежуток σ стягивается к точке φ промежутка Ω. В силу непрерывности функции $r(\varphi)$ имеем $m(\sigma)\to r(\varphi)$, $M(\sigma)\to r(\varphi)$, поэтому

$$\frac{dS}{dl}=\lim\frac{S(\sigma)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}r^2(\varphi),$$

откуда

$$S(\sigma)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi. \quad (3.2)$$

В частности,

$$S=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}r^2\,d\varphi.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли

$$(x^2+y^2)^2=2a^2xy. \quad (3.3)$$

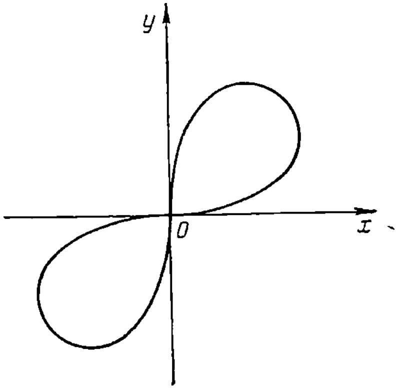

Рис. 9

Р е ш е н и е. Выведем полярное уравнение лемнискаты. Для этого в равенстве (3.3) положим $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. После несложных преобразований имеем

$$r^2=a^2\sin^2\varphi.$$

По этому полярному уравнению строим лемнискату на полярной плоскости (рис. 9). Лемниската симметрична относительно полюса, следовательно,

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}r^2\,d\varphi=a^2\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi=-\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=a^2.$$

§ 3. Вычисление объема тела

Пусть в пространстве задано тело, проекцией которого на ось Ox является промежуток $\Omega=[a, b]$ (рис. 10). Найдем объем V этого тела.

Допустим, что известна функция $S(x)$, равная площади поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через произвольную точку x промежутка Ω. Допустим также, что функция $S(x)$ непрерывна. Обозначим через $V(\sigma)$ объем части тела, проектирующейся на замкнутый частичный промежуток σ промежутка Ω. Очевидно, что $V(\sigma)$ — аддитивная функция промежутка σ.

Обозначим через $m(\sigma)$ и $M(\sigma)$ соответственно наименьшее и наибольшее значения площади поперечного сечения $S(x)$ над точками промежутка σ. Очевидно, что $V(\sigma)$ заключен между объемами прямых цилиндров с ос-

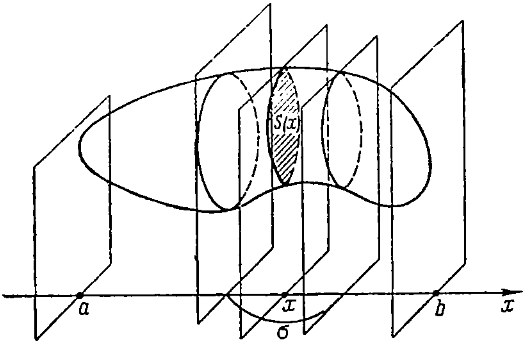

Рис. 10

нованиями $m(\sigma)$ и $M(\sigma)$ и с высотами, равными $l(\sigma)$. Таким образом,

$$m(\sigma)\,l(\sigma) \leqslant V(\sigma) \leqslant M(\sigma)\,l(\sigma).$$

Отсюда

$$\frac{dV}{dl} = \lim \frac{V(\sigma)}{l(\sigma)} = S(x) \quad (x \in \sigma),$$

следовательно,

$$V(\sigma) = \int_{\sigma} S(x)\,dx. \tag{3.4}$$

В частности,

$$V = \int_{\Omega} S(x)\,dx.$$

Телом вращения называют след от вращения плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры.

Найдем объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями, уравнения которых $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, $y=0$ и $y=f(x)$ (рис. 11). Поперечное сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точ-

ку x промежутка $[a, b]$, есть круг радиуса $|f(x)|$, поэтому

$$S(x)=\pi f(x)^2.$$

По формуле (3.4) получаем

$$V=\pi \int_a^b f(x)^2 dx=\pi \int_a^b y^2 dx. \tag{3.5}$$

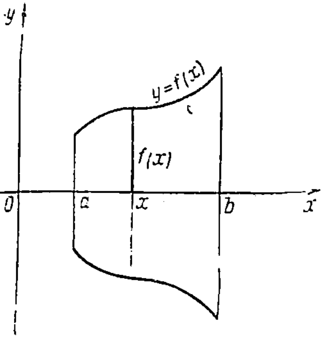

Рис. 11

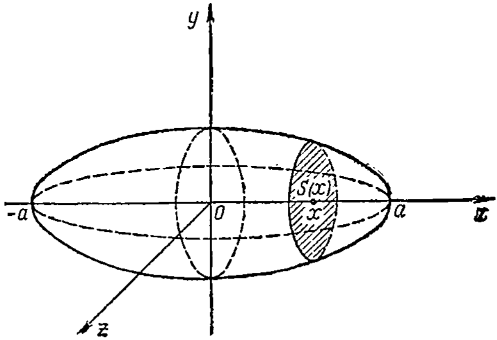

Рис. 12

Пример. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом с полуосями a, b, c.

Решение. Направим координатные оси Ox, Oy, Oz по осям эллипсоида (рис. 12). В выбранной системе координат уравнение эллипсоида является каноническим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.6}$$

При этом проекцией данного тела на ось Ox является промежуток $\Omega=[-a, a]$, поэтому

$$V=\int_{-a}^{a} S(x)\,dx.$$

Сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку x промежутка Ω, ограничено эллипсом. Каноническое уравнение этого эллипса получится, если в уравнении (3.6) член x^2/a^2 перенести вправо и разделить полученное уравнение на $1-x^2/a^2$. Таким образом, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2(1-x^2/a^2)}+\frac{z^2}{c^2(1-x^2/a^2)}=1.$$

Следовательно, полуоси эллипса $b'=b\sqrt{1-x^2/a^2}$, $c'=c\sqrt{1-x^2/a^2}$. Применяя найденное ранее выражение для площади фигуры, ограниченной эллипсом (см. пример 2, § 1), получаем:

$$S(x)=\pi b'c'=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Таким образом,

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

§ 4. Длина пространственной линии

Вычислим длину L пространственной линии Γ, заданной параметрическими уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b). \tag{3.7}$$

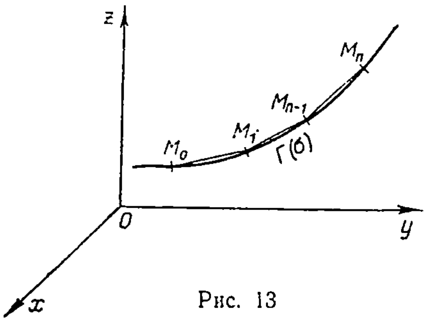

Рис. 13

При этом предположим, что:

1) соотношения (3.7) реализуют взаимно однозначное отображение промежутка $\Omega=[a, b]$ на линию Γ;

2) функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют в Ω непрерывные производные.

Обозначим через $L(\sigma)$ длину части $\Gamma(\sigma)$ линии Γ, прообразом которой служит частичный замкнутый промежуток σ промежутка Ω. Очевидно, что $L(\sigma)$ является аддитивной функцией промежутка σ.

Разобьем промежуток $\sigma=[\alpha, \beta]$ на n частей точками $t_0=\alpha$, t_1, t_2, ..., $t_n=\beta$ $(t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n)$. Точке деления t_k промежутка σ отвечает на линии $\Gamma(\sigma)$ ее точка деления $M_k(x(t_k), y(t_k), z(t_k))$ (рис. 13). Соединим соседние точки деления линии $\Gamma(\sigma)$ отрезками прямых. В результате получится ломаная линия Γ_n, вписанная в линию $\Gamma(\sigma)$. Длина L_n этой ломаной равна сумме длин ее прямолинейных отрезков (звеньев ломаной):

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1} M_k. \tag{3.8}$$

Применяя формулу расстояния между двумя точками в декартовом пространстве и формулу конечных приращений, получаем:

$$M_{k-1} M_k =$$

$$= \sqrt{[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2+[y(t_k)-y(t_{k-1})]^2+[z(t_k)-z(t_{k-1})]^2} =$$

$$= \sqrt{x'(c_k)^2 + y'(d_k)^2 + z'(e_k)^2}\,\Delta t_k, \tag{3.9}$$

где c_k, d_k, e_k — точки промежутка $[t_{k-1}, t_k]$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ — длина промежутка $[t_{k-1}, t_k]$. Из равенства (3.9) следует, что

$$\sqrt{A_1(\sigma) + A_2(\sigma) + A_3(\sigma)}\,\Delta t_k \leqslant M_{k-1} M_k \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{B_1(\sigma) + B_2(\sigma) + B_3(\sigma)}\,\Delta t_k, \tag{3.10}$$

где $A_1(\sigma)$, $A_2(\sigma)$, $A_3(\sigma)$ — наименьшие значения функций $x'(t)^2$, $y'(t)^2$, $z'(t)^2$ на промежутке σ; $B_1(\sigma)$, $B_2(\sigma)$, $B_3(\sigma)$ — наибольшие значения тех же функций на том же промежутке.

Учитывая, что $\sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = l(\sigma)$, а также равенство (3.8) и неравенство (3.10), имеем

$$\sqrt{A_1(\sigma) + A_2(\sigma) + A_3(\sigma)}\,l(\sigma) \leqslant L_n \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{B_1(\sigma) + B_2(\sigma) + B_3(\sigma)}\,l(\sigma). \tag{3.11}$$

Длина L_n ломаной линии Γ_n при сближении соседних точек деления t_k промежутка σ приближается к длине $L(\sigma)$ линии $\Gamma(\sigma)$, т. е. при условии, что все Δt_k одновременно стремятся к нулю

$$L(\sigma) = \lim L_n.$$

Поэтому из неравенства (3.11) следует неравенство

$$\sqrt{A_1(\sigma) + A_2(\sigma) + A_3(\sigma)}\,l(\sigma) \leqslant L(\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{B_1(\sigma) + B_2(\sigma) + B_3(\sigma)}\,l(\sigma),$$

или

$$\sqrt{A_1(\sigma) + A_2(\sigma) + A_3(\sigma)} \leqslant \frac{L(\sigma)}{l(\sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{B_1(\sigma) + B_2(\sigma) + B_3(\sigma)}.$$

Так как функции $x'(t)^2$, $y'(t)^2$, $z'(t)^2$ непрерывны, то при стягивании промежутка σ к точке t промежутка Ω

$$\lim A_1(\sigma)=\lim B_1(\sigma)=x'(t)^2,\ \lim A_2(\sigma)=\lim B_2(\sigma)=$$
$$=y'(t)^2,\ \lim A_3(\sigma)=\lim B_3(\alpha)=z'(t)^2.$$

Поэтому

$$\frac{dL}{dl}=\lim\frac{L(\sigma)}{l(\sigma)}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$L(\sigma)=\int_\sigma\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt. \qquad (3.12)$$

В частности,

$$L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$$

Пример. Найти длину одного витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Решение. По формуле (3.12) находим

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

§ 5. Длина плоской линии

Допустим сначала, что плоская линия Γ задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$. Длина L этой линии находится по формуле (3.12) при $z=0$

$$L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt. \qquad (3.13)$$

Пусть теперь линия задана явным уравнением $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Полагая $x=t$, получаем параметрические уравнения линии Γ:

$$x=t,\ y=f(t)\ (a\leqslant t\leqslant b).$$

Воспользовавшись формулой (3.13), получаем

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (3.14)$$

Пусть, наконец, линия Г задана полярным уравнением $r=r(\varphi)$ $(a\leqslant\varphi\leqslant b)$. Применяя формулы преобразования полярной системы координат в декартову ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$), получаем параметрические уравнения линии Г:

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,\ y=r(\varphi)\sin\varphi,$$

где φ — параметр.

По формуле (3.13) имеем

$$L=\int_a^b \sqrt{x_\varphi'^2+y_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

Далее

$$x_\varphi'=r_\varphi'\cos\varphi-r\sin\varphi,\qquad y_\varphi'=r_\varphi'\sin\varphi+r\cos\varphi.$$

Итак,

$$x_\varphi'^2+y_\varphi'^2=(r_\varphi'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2+(r_\varphi'\sin\varphi+r\cos\varphi)^2=$$

$$=r_\varphi'^2\cos^2\varphi-2r_\varphi' r\sin\varphi\cos\varphi+r^2\sin^2\varphi+r_\varphi'^2\sin^2\varphi+$$

$$+2r_\varphi' r\sin\varphi\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi=r_\varphi'^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+$$

$$+r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=r_\varphi'^2+r^2.$$

Поэтому окончательно имеем

$$L=\int_a^b \sqrt{r^2+r_\varphi'^2}\,d\varphi. \qquad (3.15)$$

Пример 1. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Решение. По формуле (3.13) находим

$$L=\int_0^{2\pi} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -2a\, 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Пример 2. Найти длину линии $y = \ln\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/4)$.

Решение. Применяя формулу (3.14), получаем

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}/2} = \ln\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Пример 3. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

Решение. По формуле (3.15) имеем

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi =$$

$$= 2a\left[\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi\right] = 2a\left[\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi -\right.$$

$$\left. - \int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi\right] = 2a\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_\pi^{2\pi}\right) = 8a.$$

§ 6. Общая схема применения определенного интеграла

Переменная величина отличается от своего предела на бесконечно малую величину, поэтому формулу (1.4), позволяющую определить плотность $p(x)$ аддитивной функции $F(\sigma)$ промежутка σ, можно записать так:

$$\frac{F(\sigma)}{l(\sigma)} = p(x) + \alpha(x, \sigma),$$

где $\alpha(x, \sigma) \to 0$, если промежуток σ стягивается к точке x промежутка Ω. Иначе,

$$F(\sigma) = p(x) l(\sigma) + \alpha(x, \sigma) l(\sigma). \tag{3.16}$$

Величину

$$dF = p(x) l(\sigma), \tag{3.17}$$

являющуюся линейной частью аддитивной функции $F(\sigma)$ относительно длины $l(\sigma)$ промежутка σ, называют *дифференциалом* или *элементом* этой аддитивной функции. Так как плотность аддитивной функции $l(\sigma)$ равна единице, то из формулы (3.17) следует, что $dl = l(\sigma)$. Поэтому формулу (3.17) можно записать в виде

$$dF = p(x)\, dl. \tag{3.18}$$

На практике длину промежутка, в котором содержится точка x, обозначают через dx. В этом случае равенство (3.18) принимает вид

$$dF = p(x)\, dx. \tag{3.19}$$

Если заранее известно, что плотность $p(x)$ есть непрерывная функция точки x, то из простых соображений можно сразу получить равенство (3.19), отбрасывая в величине аддитивной функции $F(\sigma)$ на малом промежутке длины dx, содержащем точку x, бесконечно малые высших порядков и оставляя только главную часть $F(\sigma)$, пропорциональную dx. Из формулы (3.19) следует, что

$$F(\sigma) = \int_{\sigma} p(x)\, dx.$$

Пример. Вычислить работу A, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость с удельным весом γ из кони-

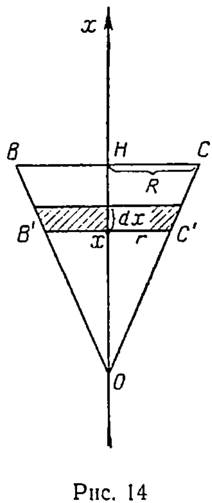

Рис. 14

ческого сосуда, радиус основания которого R и высота H, обращенного вершиной вниз (рис. 14).

Решение. Направим по оси конуса числовую ось Ox, поместив ее начало в вершине конуса. Тогда все точки конуса будут проектироваться в промежуток $[0, H]$ оси Ox. Обозначим через $A(\sigma)$ работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать из конуса слой жидкости, проектирующийся в частичный промежуток σ промежутка $[0, H]$. Очевидно, что $A(\sigma)$ является аддитивной функцией промежутка σ.

Пусть x — точка промежутка σ и dx — длина этого промежутка. Тогда имеем

$$dA = \gamma dv(H - x),$$

где dv — объем соответствующего слоя жидкости толщиной dx. Далее имеем

$$dv = \pi r^2 dx,$$

где r — радиус слоя жидкости. Из подобия треугольников OBC и $OB'C'$ следует, что

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{H}.$$

Отсюда $r = \frac{Rx}{H}$, следовательно,

$$dv = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2 dx.$$

Таким образом, элемент работы

$$dA = \gamma\pi \frac{R^2}{H^2} x^2 (H - x)\, dx.$$

Окончательно получаем

$$A = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 (H - x)\, dx = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \left(H \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^H = \pi\gamma \frac{R^2 H^2}{12}.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ГЛАВА IV

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Функция точки и функция плоской области

Напомним хорошо известное из раздела курса математического анализа, посвященного дифференциальному исчислению функции многих переменных, определение.

Пусть Ω — область плоскости xOy. *Переменная z называется функцией точки $M(x;\ y)$, определенной в области Ω, если каждой точке $M(x;\ y)$ из этой области поставлено в соответствие определенное значение переменной z.* Тот факт, что z есть функция точки M, определенная в области Ω, записывается следующим образом:

$$z=f(M),\ M\in\Omega.$$

Так как положение точки M определяется ее координатами x и y, то эта функция точки на самом деле является функцией координат этой точки, т. е. $z=f(x,\ y)$.

Введем новое понятие функции, аргументом которой является не точка, а плоская область. Прежде чем перейти к соответствующему определению, отметим следующее. Обычно под плоской областью понимается только открытая область, т. е., грубо говоря, часть плоскости, ограниченная некоторыми замкнутыми непрерывными линиями, которые образуют границу области, причем ни одна точка границы не принадлежит области. Таким образом, открытая область состоит только из её внутренних точек. В дальнейшем под областью понимается либо открытая область, либо замкнутая, получающаяся из открытой области присоединением всей ее границы, либо множество точек плоскости, получающееся из открытой области присоединением части ее границы.

Область σ называется *частичной областью* области Ω, если все ее точки принадлежат этой области. При этом не исключено, что σ состоит из одной точки, является линией или совпадает с Ω.

Обозначим через $A(\Omega)$ некоторую совокупность (не обязательно всех) частичных областей σ области Ω.

Говорят, что *переменная* u *есть функция области* σ, *заданная на множестве* $A(\sigma)$, *если каждой области* σ *из множества* $A(\Omega)$ *поставлено в соответствие определенное значение переменной* u. Тот факт, что u есть функция области σ, определенная на множестве $A(\Omega)$, записывается так:

$$u = F(\sigma),\ \sigma \in A(\Omega).$$

Простым примером функции области является ее диаметр, т. е. наибольшее из расстояний между двумя точками ее границы.

§ 2. Аддитивная функция плоской области

Пусть теперь $A(\Omega)$ — множество всех частичных областей области Ω.

Функция области $F(\sigma)$, *определенная на множестве* $A(\Omega)$, *называется аддитивной, если при разбиении любой частичной области* σ *на две области* σ_1 *и* σ_2 *без общих точек* $(\sigma = \sigma_1 + \sigma_2)$ *справедливо равенство*

$$F(\sigma) = F(\sigma_1 + \sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2). \tag{4.1}$$

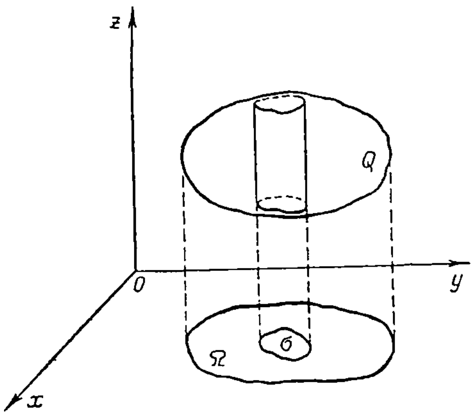

Рис. 15

Пример 1. Функция $S(\sigma)$, равная площади области σ, является, очевидно, аддитивной функцией σ, так как площадь области равна сумме площадей ее частей.

Пример 2. Рассмотрим в трехмерном пространстве $Oxyz$ тело Q, точки которого проектируются на область

Ω плоскости xOy (рис. 15). Объем $V(\sigma)$ части тела Q, расположенной над частичной областью σ области Ω, есть аддитивная функция плоской области σ.

Пример 3. Предположим, что в плоской области Ω распределена некоторая масса. Масса $m(\sigma)$ частичной области σ области Ω есть аддитивная функция σ.

Нетрудно заметить, что определение аддитивной функции плоской области в основном совпадает с определением аддитивной функции промежутка. Поэтому все предложения об аддитивных функциях промежутка легко переносятся на аддитивные функции плоской области. Приведем эти предложения без доказательства.

Теорема 4.1. *Пусть частичная область σ разбита на конечное число областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, каждая пара которых не имеет общих точек. Тогда для любой аддитивной функции $F(\sigma)$ справедливо равенство*

$$F(\sigma)=F\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\right)=\sum_{k=1}^{n}F(\sigma_k). \tag{4.2}$$

Теорема 4.2. *Линейная комбинация аддитивных функций плоской области есть также аддитивная функция плоской области.*

Из этой теоремы следует, что сумма и разность аддитивных функций плоской области суть также аддитивные функции плоской области.

Теорема 4.3. *Предел последовательности аддитивных функций плоской области есть также аддитивная функция плоской области.*

§ 3. Непрерывные аддитивные функции плоской области

Аддитивная функция $F(\sigma)$ плоской области σ называется непрерывной, если ее значение на любой частичной области, площадь которой равна нулю, также равно нулю.

Таким образом, значения непрерывной аддитивной функции плоской области на одноточечном множестве, а также на множестве, состоящем из конечного числа точек, и на линиях конечной длины равны нулю.

Для непрерывных аддитивных функций плоской области легко доказываются те же предложения, что и для аддитивной функции промежутка, а именно следующие теоремы.

Теорема 4.4. *Линейная комбинация непрерывных аддитивных функций плоской области есть также непрерывная аддитивная функция плоской области.*

Теорема 4.5. *Предел последовательности непрерывных аддитивных функций плоской области есть непрерывная аддитивная функция плоской области.*

В дальнейшем будем считать, что *основная область* Ω *замкнута и ограничена*, и рассматривать только *непрерывные аддитивные функции плоской области.* В силу этого условия определение аддитивной функции области можно ослабить, а именно, *считать функцию* $F(\sigma)$ *области* σ *аддитивной, если при разбиении частичной области* σ *на две области* σ_1 *и* σ_2 *без общих внутренних точек справедливо равенство* (4.1).

§ 4. Плотность аддитивной функции плоской области

Условимся считать, что переменная частичная область σ *стягивается к точке* $M \in \Omega$, если $M \in \sigma$ и если диаметр $d(\sigma)$ области σ стремится к нулю.

Число p называется *плотностью аддитивной функции* $F(\sigma)$ в точке $M \in \Omega$, если для любой переменной частичной области σ, стягивающейся к точке M, справедливо равенство

$$\lim \frac{F(\sigma)}{S(\sigma)} = p, \tag{4.3}$$

где $S(\sigma)$ — площадь области σ.

Аддитивную функцию области, имеющую в точке M плотность, будем называть *дифференцируемой* в этой точке. Аддитивная функция называется дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке основной области Ω. В этом случае ее плотность есть функция точки M, определенная в области Ω:

$$p = p(M) = p(x, y).$$

Равенство (4.3) можно записать в виде

$$F(\sigma) = [p + \alpha(\sigma, M)] S(\sigma), \tag{4.4}$$

где $\alpha(\sigma, M) \to 0$ при стягивании области σ к точке M. Выражение

$$dF = pS(\sigma) \tag{4.5}$$

условимся называть *дифференциалом* или *элементом* аддитивной функции $F(\sigma)$. Если в равенстве (4.5) положить $F(\sigma)=S(\sigma)$, то получим

$$dS=S(\sigma),$$

так как плотность площади плоской области равна единице. Поэтому равенство (4.5) можно записать в виде

$$dF=p\,dS, \tag{4.6}$$

откуда

$$p=\frac{dF}{dS}.$$

Из равенства (4.6) следует, что элемент dF аддитивной функции есть линейная функция элемента площади dS. Кроме того, он является главной частью бесконечно малой $F(\sigma)$ при условии, что область σ стягивается к точке x.

Понятие плотности аддитивной функции плоской области в основном совпадает с понятием плотности аддитивной функции промежутка и с понятием производной функции точки. Поэтому свойства плотностей аддитивных функций и производных функции точки сходны. В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.6. *Плотность линейной комбинации аддитивных функций плоской области равна линейной комбинации плотностей этих функций с теми же коэффициентами*

$$\frac{d}{dS}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k F_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{dF_k}{dS}. \tag{4.7}$$

Теорема 4.7. *Необходимым и достаточным условием неотрицательности (неположительности) дифференцируемой аддитивной функции плоской области является неотрицательность (неположительность) ее плотности.*

Следствием последней теоремы является теорема об единственности аддитивной функции области с данной плотностью.

§ 5. Определение и свойства двойного интеграла

Двойным интегралом от заданной в плоской области Ω функции точки $f(M)=f(x, y)$ называется аддитивная функция $F(\sigma)$ плоской области, плотность которой равна $f(M)$. При этом применяются следующие обозначения:

$$F(\sigma)=\iint_{\sigma} f(M)\,dS=\iint_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Следует обратить внимание на аналогию определений двойного и определенного интегралов. В силу этого, теоремы, справедливые для определенного интеграла, очевидно, переносятся на двойные интегралы. Приведем соответствующие определения и теоремы.

Из теоремы единственности аддитивной функции с данной плотностью следует *теорема единственности двойного интеграла для данной функции точки.*

Не для всякой функции точки $f(M)$ существует двойной интеграл. Функция $f(M)$, для которой двойной интеграл существует, называется *интегрируемой в области* Ω.

Так же, как и для функции одной переменной, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.8. *Функция $f(M)$, непрерывная в области Ω, интегрируема.*

В дальнейшем будем считать, что подынтегральная функция $f(M)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема.

Доказательства приводимых ниже свойств двойного интеграла аналогичны доказательствам соответствующих свойств определенного интеграла.

1. *Двойной интеграл от линейной комбинации функций точки равен линейной комбинации двойных интегралов от этих функций:*

$$\iint_{\sigma} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(M)\,dS = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \iint_{\sigma} f_k(M)\,dS. \tag{4.8}$$

2. *Если область σ разбита на две области σ_1 и σ_2 без общих внутренних точек, то*

$$\iint_{\sigma} f(M)\,dS=\iint_{\sigma_1} f(M)\,dS+\iint_{\sigma_2} f(M)\,dS. \tag{4.9}$$

3. *Если $f(M)\geqslant g(M)$, то*

$$\iint_{\sigma} f(M)\,dS\geqslant\iint_{\sigma} g(M)\,dS. \tag{4.10}$$

4. *Справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\iint_{\sigma} f(M)\,dS\right| \leqslant \iint_{\sigma} |f(M)|\,dS. \tag{4.11}$$

§ 6. Двойные интегральные суммы и их предел

Расмотрим в ограниченной плоской области σ ограниченную функцию $f(M)$.

Разобьем область σ на n частичных областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_n$, каждая пара которых не имеет общих внутренних точек. В каждой из частичных областей σ_k возьмем по точке c_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ и составим выражение

$$T = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, S(\sigma_k),$$

называемое *интегральной суммой* для функции $f(M)$.

Число I называется *пределом интегральной суммы* T, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенств $d(\sigma_k) < \delta$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ следует неравенство

$$|T - I| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, S(\sigma_k) - I\right| < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.9. *Если функция $f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области Ω, то для любой частичной области σ области Ω справедливо равенство*

$$\lim I = \lim \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, S(\sigma_k) = \iint_{\sigma} f(M)\, dS.$$

Доказательство этого предложения проводится по той же схеме, что и для аналогичного предложения для функции одной переменной (см. теорему 2.9).

§ 7. Повторный интеграл

Допустим, что проекцией плоской области σ на ось Ox является промежуток $[a, b]$. Обозначим через $\sigma(x)$ поперечное сечение области σ прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку x промежутка $[a, b]$ (рис. 16). Выражение вида

$$\int_a^b dx \int_{\sigma(x)} f(x, y)\, dy \tag{4.13}$$

называется *повторным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области σ. Он вычисляется следующим образом: сначала находится внутренний интеграл при переменной интегрирования y и при фиксированном x, а затем результат этого интегрирования, являющийся функцией переменной x, интегрируется по переменной x.

Примечание. Поперечное сечение $\sigma(x)$ области σ может оказаться суммой нескольких промежутков без общих точек. В этом случае под интегралом $\int\limits_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy$ следует понимать сумму интегралов по всем этим промежуткам.

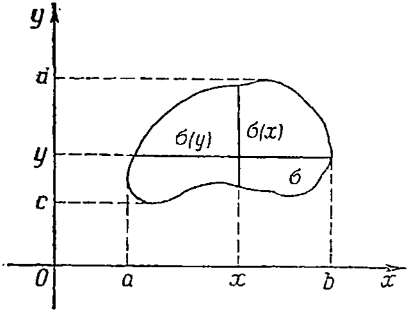

Рис. 16

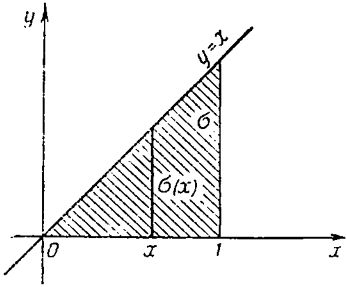

Рис. 17

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)\,dy$.

Решение. Выражение

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)\,dy$$

есть повторный интеграл по области (рис. 17)

$$\sigma: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

Имеем

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)\,dy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^x dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4.10. *Повторный интеграл является аддитивной функцией области* σ.

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем, когда область σ разбита на области σ_1 и σ_2 некоторой непрерывной линией l (рис. 18). Обозначим интеграл (4.13) через $F(\sigma)$. Используя аддитивность определенного интеграла, имеем

$$F(\sigma)=\int_a^c dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy+\int_c^d dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy+$$

$$+\int_d^b dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy=\int_a^c dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy+$$

$$+\int_c^d dx\left(\int_{\sigma_1(x)} f(x, y)\,dy+\int_{\sigma_2(x)} f(x, y)\,dy\right)+\int_d^b dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy=$$

$$=A+B, \qquad (4.14)$$

где

$$A=\int_a^c dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy+\int_c^d dx\int_{\sigma_1(x)} f(x, y)\,dy,$$

$$B=\int_c^d dx\int_{\sigma_2(x)} f(x, y)\,dy+\int_d^b dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy.$$

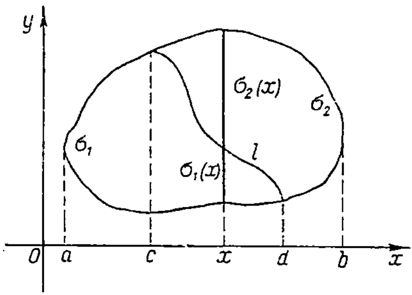

Рис. 18

Для точки $x\in[a, c]$ имеем $\sigma(x)=\sigma_1(x)$, для точки $x\in[d, b]$ имеем $\sigma(x)=\sigma_2(x)$, поэтому

$$A=\int_a^c dx\int_{\sigma_1(x)} f(x, y)\,dy+\int_c^d dx\int_{\sigma_1(x)} f(x, y)\,dy=$$

$$=\int_a^d dx\int_{\sigma_1(x)} f(x, y)\,dy=F(\sigma_1),$$

$$B=\int_c^d dx\int_{\sigma_2(x)} f(x, y)\,dy+\int_d^b dx\int_{\sigma_2(x)} f(x, y)=$$

$$=\int_c^b dx\int_{\sigma_2(x)} f(x, y)\,dy=F(\sigma_2).$$

Из этих равенств и из равенства (4.14) окончательно получаем:

$$F(\sigma)=F(\sigma_1)+F(\sigma_2),$$

что и требовалось доказать.

Если в выражении (4.13) поменять местами x и y, то приходим к повторному интегралу

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\sigma(y)} f(x,\ y)\,dx, \tag{4.15}$$

где промежуток $[c,\ d]$ является проекцией области σ на ось Oy; $\sigma(y)$ — поперечное сечение области σ прямой, проходящей через точку y промежутка $[c,\ d]$ и параллельной оси Ox (см. рис. 16).

§ 8. Вычисление двойного интеграла

Теорема 4.11. *Двойной интеграл от функции* $f(M)=f(x,\ y)$ *по области* σ *равен повторному интегралу от этой функции по той же области*:

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)\,dS=\int\limits_a^b dx \int\limits_{\sigma(x)} f(x,\ y)\,dy. \tag{4.16}$$

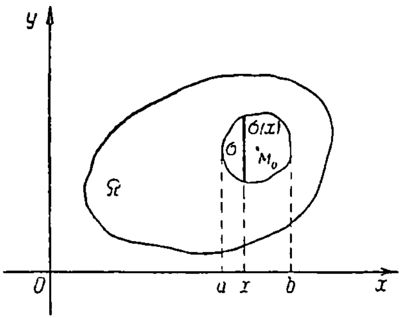

Рис. 19

Доказательство. Левая часть равенства (4.16) есть аддитивная функция области σ (согласно определению двойного интеграла). В предыдущем параграфе было показано, что правая часть этого равенства также аддитивная функция области σ. Поэтому справедливость равенства (4.16) будет доказана, если установить, что обе эти аддитивные функции имеют одинаковую плотность во всех точках основной области Ω.

Согласно определению двойного интеграла для любой точки $M_0(x_0;\ y_0)\in\Omega$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dS}\iint\limits_{\sigma} f(M)\,dS=f(M_0) \quad (M_0\in\sigma).$$

Покажем, что это же равенство справедливо для плотности повторного интеграла

$$\Phi(\sigma)=\int_a^b dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy.$$

Пусть σ — частичная область области Ω, содержащая точку M_0 (рис. 19). Интеграл $\int_{\sigma(x)} dy$ численно равен длине $t(x)$ поперечного сечения области σ прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку x промежутка $[a, b]$. Поэтому, согласно формуле (3.1),

$$\int_a^b dx\int_{\sigma(x)} dy=\int_a^b t(x)\,dx=S(\sigma).$$

Далее имеем

$$\Phi(\sigma)-f(M_0)S(\sigma)=\int_a^b dx\int_{\sigma(x)} f(x, y)\,dy-f(M_0)\int_a^b dx\int_{\sigma(x)} dy=$$

$$=\int_a^b dx\int_{\sigma(x)} [f(M)-f(M_0)]\,dy.$$

Отсюда следует, что

$$|\Phi(\sigma)-f(M_0)S(\sigma)|=\left|\int_a^b dx\int_{\sigma(x)}[f(M)-f(M_0)]\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b dx\int_{\sigma(x)}|f(M)-f(M_0)|\,dy\leqslant\alpha(\sigma)\int_a^b dx\int_{\sigma(x)} dy=\alpha(\sigma)S(\sigma),$$

где $\alpha(\sigma)=\max|f(M)-f(M_0)|$ в области σ. Разделим последнее неравенство на $S(\sigma)$. Тогда имеем

$$\left|\frac{\Phi(\sigma)}{S(\sigma)}-f(M_0)\right|\leqslant\alpha(\sigma).$$

Так как $f(M)$ — непрерывная функция, то $\alpha(\sigma)$ стремится к нулю при стягивании области σ к точке M_0. Поэтому при стягивании области σ к точке M_0 получим

$$\lim\frac{\Phi(\sigma)}{S(\sigma)}=f(M_0).$$

Итак, доказано, что в произвольной точке области Ω плотности повторного и двойного интегралов одинаковы, следовательно, оба интеграла равны.

Очевидно, что для вычисления двойного интеграла наряду с формулой (4.16) можно также использовать формулу

$$\iint_\sigma f(M)\,dS=\int_c^d dy\int_{\sigma(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (4.17)$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma}(x+2y)\,dxdy$ по области σ, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=1$ (рис. 20).

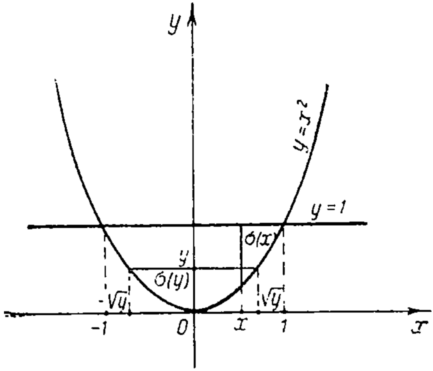

Рис. 20

Решение. По формуле (4.16) получаем

$$\iint\limits_{\sigma}(x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x+2y)\,dy=\int\limits_{-1}^{1}(xy+y^2)\Big|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}(x+1-x^3-x^4)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{5}.$$

Воспользуемся формулой (4.17):

$$\iint\limits_{\sigma}(x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x+2y)\,dx=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{y}{2}+2y\sqrt{y}-\frac{y}{2}+2y\sqrt{y}\right)dy=4\int\limits_{0}^{1}y^{3/2}\,dy=$$

$$=\frac{8}{5}y^{5/2}\Big|_{0}^{1}=\frac{8}{5}.$$

Таким образом, оба способа вычисления приводят к одному и тому же результату.

§ 9. Преобразование плоской области в плоскую область

Рассмотрим область Ω плоскости xOy и область D плоскости uOv (рис. 21). Допустим, что между областями Ω и D установлено взаимно однозначное соответствие, т. е. каждой точке $N(u;\ v)$ области D поставлена в соответствие только одна точка $M(x;\ y)$ области Ω и, наоборот, каждой точке $M(x;\ y)$ области Ω поставлена в соответствии только одна точка $N(u;\ v)$ области D.

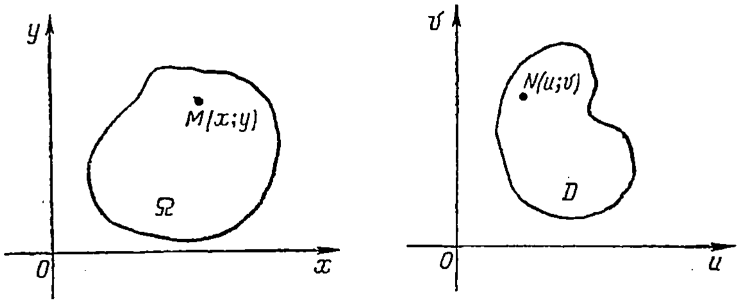

Рис. 21

Очевидно, что координаты x, y точки M зависят от положения точки N, т. е. от ее координат u, v. Иными словами, координаты x, y точки M являются функциями координат u, v соответствующей точки N:

$$x=x(u,\ v);\ y=y(u,\ v). \tag{4.18}$$

С помощью формул (4.18) осуществляется преобразование области D на область Ω. Зная координаты точки N, можно найти координаты соответствующей точки M. Условимся называть точку M *образом точки N* при преобразовании (4.18); в свою очередь точка N называется *прообразом точки M* при этом преобразовании.

В силу взаимной однозначности соответствия между областями Ω и D формулы (4.18) можно обратить и получить соотношения

$$u=u(x,\ y);\ v=v(x,\ y), \tag{4.19}$$

реализующие обратное преобразование области Ω на область D. При таком преобразовании точка N является образом точки M, а точка M — прообразом точки N.

Преобразование (4.18) области D на область Ω называется *непрерывным*, если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ непрерывны. Можно показать, что в этом случае и обратное преобразование (4.19) области Ω на область D также непрерывно.

Непрерывные взаимно однозначные преобразования обладают следующими свойствами:

1) образом непрерывной линии, лежащей в области D, является непрерывная линия, лежащая в области Ω;

2) образом замкнутой (открытой) частичной области γ области D является замкнутая (открытая) частичная область σ области Ω.

Преобразование (4.18) называется *дифференцируемым* или *гладким*, если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют непрерывные частные производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v. Дифференцируемое преобразование является и непрерывным, поскольку, как известно, функции, имеющие непрерывные частные производные, являются непрерывными. Следовательно, и обратное преобразование (4.19) также непрерывно. Можно показать, что преобразование (4.19) дифференцируемо, если дифференцируемо прямое преобразование (4.18) и если не обращается в нуль определитель

$$J(N) = J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Определитель $J(u, v)$ называется *определителем Якоби* или *якобианом* преобразования (4.18).

§ 10. Криволинейные координаты точки на плоскости

Дадим иную трактовку формул преобразования (4.18) и (4.19). Так как числа u и v полностью определяют положение точки M на плоскости xOy и разным парам таких чисел соответствуют разные точки этой плоскости, то естественно называть числа u и v *координатами* (криволинейными) точки M.

Формулы (4.18) позволяют найти декартовы координаты точки M по ее криволинейным координатам, а формулы (4.19) определить криволинейные координаты точки M по ее декартовым координатам. Соотношения (4.18) являются формулами преобразования криволинейных координат в декартовы, а соотношения (4.19) —

формулами обратного преобразования декартовых координат в криволинейные.

Если в формулах (4.19) последовательно зафиксировать числа u и v, то получится пара линий плоскости xOy, называемых *координатными линиями*. Эта пара координатных линий пересекается только в точке M, криволинейные координаты которой u и v.

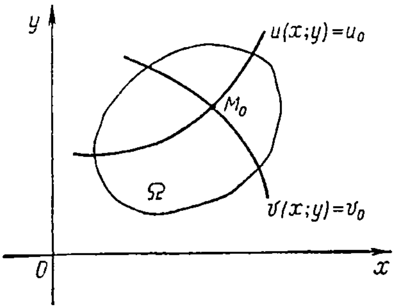

Рис. 22

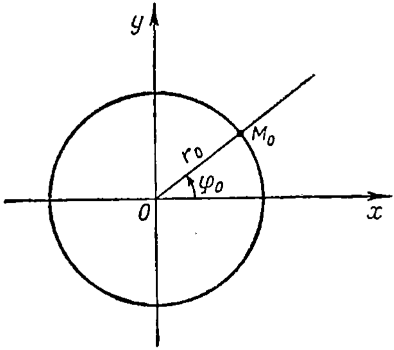

Рис. 23

Таким образом, если u_0 и v_0 — криволинейные координаты точки M_0 плоскости xOy, то координатные линии

$$u(x, y)=u_0;\; v(x, y)=v_0$$

пересекаются только в точке M_0 (рис. 22). Например, как известно, с помощью формул

$$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi \tag{4.20}$$

можно преобразовать полярные координаты r, φ точки в декартовы координаты x и y. Обратное преобразование декартовых координат в полярные осуществляется по формулам

$$\begin{gathered} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+\sigma(y)\pi, \end{gathered} \tag{4.21}$$

где $\sigma(y)=0$ при $y>0$ и $\sigma(y)=1$ при $y<0$. При фиксированных r и φ получается пара координатных линий

$$\sqrt{x^2+y^2}=r_0;\; \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+\pi\sigma(y)=\varphi_0.$$

Первая из этих линий есть окружность радиуса r_0 с центром в начале координат, а вторая — луч, исходящий из начала кординат под углом φ_0 к оси Ox (рис. 23). Точка $M_0(r_0;\ \varphi_0)$ есть точка пересечения этих координатных линий.

§ 11. Коэффициент искажения при преобразовании плоской области в плоскую область

Предположим, что преобразование (4.18) области D на область Ω непрерывно. Тогда образ σ произвольной частичной области γ области D является частичной об-

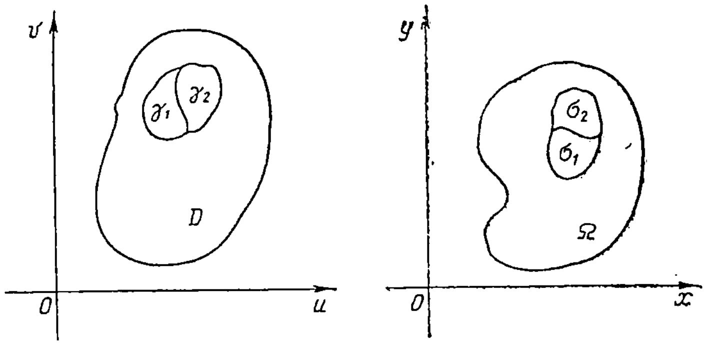

Рис. 24

ластью области Ω. Очевидно, что площадь $S(\sigma)$ области σ является функцией ее прообраза γ: $S(\sigma)=F(\gamma)$.

Теорема 4.12. *Площадь $S(\sigma)$ области σ является аддитивной функцией ее прообраза γ.*

Доказательство. Разобьем область γ на две частичные области γ_1 и γ_2 без общих точек и обозначим через σ_1 и σ_2 их образы при преобразовании (4.18) (рис. 24). Очевидно, что σ_1 и σ_2 также частичные области области σ, не имеющие общих точек, и что $\sigma_1+\sigma_2=\sigma$. В силу аддитивности площади области имеем

$$F(\gamma)=S(\sigma)=S(\sigma_1+\sigma_2)=S(\sigma_1)+S(\sigma_2)=F(\gamma_1)+F(\gamma_2),$$

что и требовалось доказать.

Может оказаться, что аддитивная функция $F(\gamma)=S(\sigma)$ дифференцируема, т. е. имеет плотность в любой точке $N(u;\ v)$ области D. Эта плотность $K(N)$ называется *коэффициентом искажения преобразования* (4.18) в точке N:

$$K(N) = \lim \frac{S(\sigma)}{S(\gamma)} \qquad (4.22)$$

при стягивании области γ к точке N.

Таким образом, *коэффициент искажения преобразования в точке N есть предел отношения площади образа к площади прообраза, когда прообраз стягивается к точке N.*

§ 12. Коэффициент искажения дифференцируемого преобразования

Теорема 4.13. *Коэффициент искажения дифференцируемого преобразования равен абсолютной величине якобиана этого преобразования*:

$$K(N) = |J(N)| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right|. \qquad (4.23)$$

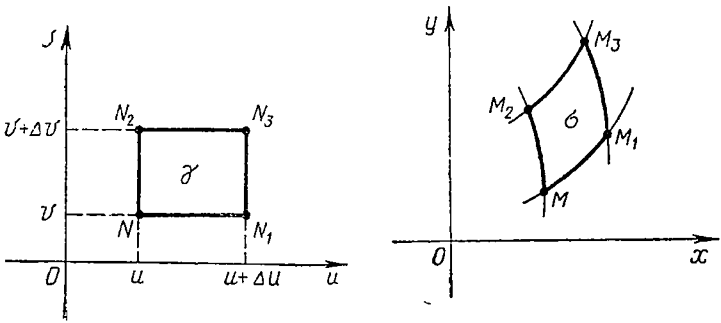

Рис. 25

Доказательство. Полное доказательство теоремы довольно сложно, однако оно значительно упрощается, если допустить, что коэффициент искажения существует и его только надо вычислить. В этом случае за γ можно брать любую область, стягивающуюся к точке N. Удобнее считать, что область γ есть прямоугольник с вершинами $N(u;\ v)$, $N_1(u+\Delta u;\ v)$, $N_2(u;\ v+\Delta v)$, $N_3(u+\Delta u;\ v+\Delta v)$ (рис. 25).

На плоскости xOy точкам N, N_1, N_2, N_3 соответствуют точки $M(x;\ y)$, $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ с координатами

$$x=x(u,\ v),\ x_1=x(u+\Delta_u x,\ v)=x+\Delta ux,\ x_2=x(u,\ v+\Delta v)=$$
$$=x+\Delta x,\ x_3=x(u+\Delta u,\ v+\Delta v),\ y=y(u,\ v),\ y_1=$$
$$=y(u+\Delta u,\ v)=y+\Delta_u y,\ y_2=y(u,\ v+\Delta v)=y+\Delta_v y,\ y_3=$$
$$=y(u+\Delta u,\ v+\Delta v).$$

Функции $x(u,\ v)$ и $y(u,\ v)$ имеют непрерывные частные производные, поэтому четырехугольник σ с вершинами M, M_1, M_2, M_3 близок к параллелограмму и его площадь $S(\sigma)$ с точностью до бесконечно малых высших порядков равна площади параллелограмма, три вершины которого суть M, M_1, M_2. Из курса аналитической геометрии на плоскости известно, что площадь такого параллелограмма равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x \\ y_1-y & y_2-y \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$S(\sigma)\approx\left|\begin{vmatrix} \Delta_u x & \Delta_v x \\ \Delta_u y & \Delta_v y \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta_u x}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v x}{\Delta v} \\ \dfrac{\Delta_u y}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v y}{\Delta v} \end{vmatrix}\right|\Delta u\,\Delta v=$$
$$=\left|\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta_u x}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v x}{\Delta v} \\ \dfrac{\Delta_u y}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v y}{\Delta v} \end{vmatrix}\right| S(\gamma).$$

Отсюда

$$\frac{S(\sigma)}{S(\gamma)}\approx\left|\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta_u x}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v x}{\Delta v} \\ \dfrac{\Delta_u y}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v y}{\Delta v} \end{vmatrix}\right|,$$

следовательно,

$$K(N)=\lim\frac{S(\sigma)}{S(\gamma)}=\lim_{\substack{\Delta u\to0\\ \Delta v\to0}}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta_u x}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v x}{\Delta v} \\ \dfrac{\Delta_u y}{\Delta u} & \dfrac{\Delta_v y}{\Delta v} \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\right|=|J(N)|,$$

что и требовалось доказать.

§ 13. Подстановка (замена переменных) в двойном интеграле

Теорема 4.14. *Пусть* (4.18) *есть дифференцируемое преобразование области D плоскости uOv на область Ω плоскости xOy. Тогда для любой частичной области γ области D справедливо равенство*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\gamma} f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|\,dudv, \qquad (4.24)$$

где σ — образ области γ при преобразовании (4.18).

Доказательство. Функция

$$F(\gamma) = \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\,dxdy$$

есть аддитивная функция прообраза γ области σ. (Это легко проверить способом, аналогичным примененному при доказательстве аддитивности площади области σ как функции области γ.)

Таким образом, в обеих частях равенства (4.24) находятся аддитивные функции области γ. Плотность правой части этого равенства равна подынтегральной функции, т. е. $f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|$. Найдем плотность левой части равенства (4.24). Имеем

$$\lim \frac{1}{S(\gamma)} \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy = \lim \frac{1}{S(\sigma)} \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy \lim \frac{S(\sigma)}{S(\gamma)} =$$

$$= f(x, y)\,K(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|.$$

Из равенства плотностей аддитивных функций, находящихся в обеих частях равенства (4.24), следует и равенство самих аддитивных функций.

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma} (x+y)\,dxdy$ по области σ, ограниченной линиями $y=x$, $y=2x$, $x+y=2$, $x+y=3$ (рис. 26).

Решение. Введем переменные u и v. Пусть

$$\begin{aligned} &y = ux && (1 \leqslant u \leqslant 2); \\ &x + y = v && (2 \leqslant v \leqslant 3). \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Тогда

$$x = \frac{v}{1+u}, \quad y = \frac{uv}{1+u}. \qquad (4.26)$$

Формулы (4.26) реализуют преобразование прямоугольника

$$\gamma:\begin{cases}1\leqslant u\leqslant 2,\\ 2\leqslant v\leqslant 3\end{cases}$$

в область σ.

Якобиан преобразования

$$J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_y & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{v}{(1+u)^2} & \dfrac{1}{1+u}\\ \dfrac{v}{(1+u)^2} & \dfrac{u}{1+u}\end{vmatrix}=-\frac{v}{(1+u)^2}.$$

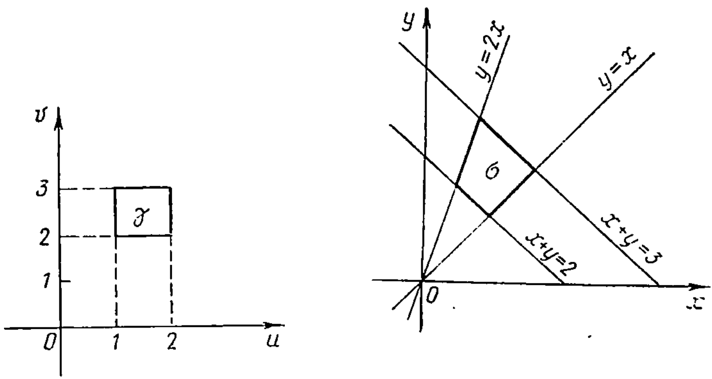

Рис. 26

Применяя формулу замены переменных (4.24), получаем

$$\iint\limits_{\sigma}(x+y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\gamma}\left(\frac{v}{1+u}+\frac{uv}{1+u}\right)\frac{v}{(1+u)^2}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{\gamma}\frac{v^2}{(1+u)^2}\,du\,dv=\int\limits_1^2\frac{du}{(1+u)^2}\int\limits_2^3 v^2\,dv=$$

$$=\left(-\frac{1}{1+u}\right)\Bigg|_1^2\cdot\frac{v^3}{3}\Bigg|_2^3=\frac{19}{18}.$$

§ 14. Двойной интеграл в полярных координатах

Преобразование полярных координат в декартовы координаты, как известно, осуществляется по формулам

$$x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi. \qquad (4.27)$$

Якобиан этого преобразования

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r.$$

Поэтому, согласно формуле (4.24), имеем

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,dxdy=\iint\limits_{\gamma} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,rdrd\varphi, \qquad (4.28)$$

где γ — область изменения полярных координат точек области σ.

Примечание. Как известно, преобразование декартовых координат в полярные не является взаимно однозначным, поскольку при этом началу координат плоскости xOy соответствует отрезок прямой $r=0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ плоскости $r\varphi$. Поэтому равенство (4.28) нельзя пока считать доказанным для области σ, содержащей начало координат плоскости. Чтобы убедиться в справедливости формулы (4.28), поступаем и в этом случае следующим образом: выписываем сначала формулу (4.28) для области σ', получающейся из области σ выбрасыванием начала координат, и для области γ', получающейся из области γ выбрасыванием отрезка $r=0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. В полученном равенстве можно заменить область σ' на область σ и область γ' на область γ, так как на величину двойного интеграла не влияет поведение подынтегральных функций на множествах точек, имеющих нулевую площадь.

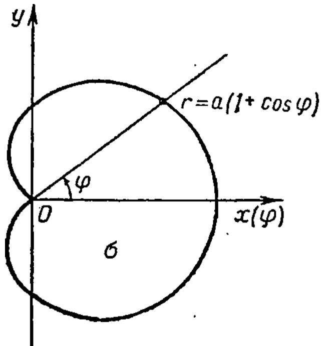

Рис. 27

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

по области σ, ограниченной линией $r=a(1+\cos\varphi)$ (рис. 27).

Решение. Область γ изменения полярных координат такова:

$$\gamma: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\varphi). \end{cases}$$

Поэтому имеем

$$\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\gamma} r\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{\gamma} r^2\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}(1+3\cos\varphi+$$

$$+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\Big[\varphi\Big|_0^{2\pi} + 3\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi\Big] =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[2\pi + \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} + \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{a^3}{3}(2\pi+3\pi) = \frac{5}{3}\pi a^3.$$

ГЛАВА V

ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Схема применения двойного интеграла

Двойной интеграл используют при нахождении аддитивной функции $F(\sigma)$ плоской области σ по ее плотности $f(M)$. Окончательная формула имеет вид:

$$F(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} f(M)\,dS. \tag{5.1}$$

Эта формула равносильна равенству

$$dF = f(M)\,dS, \tag{5.2}$$

где dF — элемент аддитивной функции; dS — элемент площади, т. е. площадь малой по диаметру области σ, содержащей точку M (см. гл. IV, § 4 этой части).

Соотношение (5.2) для элемента аддитивной функции обычно легко получается из простых геометрических и физических соображений, а также из того обстоятельства, что значения непрерывной функции $f(M)$ в разных точках бесконечно малой по диаметру области бесконечно мало отличаются друг от друга и, следовательно, с точностью до бесконечно малой совпадают.

После того, как выведено соотношение вида (5.2) для элемента аддитивной функции, окончательная формула (5.1) получается интегрированием этого элемента по области σ.

§ 2. Площадь плоской области

Как уже известно, площадь $S(\sigma)$ плоской области σ является аддитивной функцией. Плотность этой аддитивной функции

$$\frac{dS}{dS} = 1,$$

поэтому

$$S(\sigma) = \iint_{\sigma} dS. \tag{5.3}$$

В декартовых координатах формула имеет вид

$$S(\sigma) = \iint_{\sigma} dxdy. \tag{5.4}$$

Согласно формуле (4.24) замены переменных в двойном интеграле, в криволинейных координатах формула имеет вид

$$S(\sigma) = \iint_{\gamma} |J|\,dudv, \tag{5.5}$$

где J — якобиан преобразования криволинейных координат в декартовы, γ — область изменения криволинейных координат точек области σ.

Пример 1. Найти площадь области σ, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=x$ (рис. 28).

Решение. Имеем

$$S(\sigma) = \iint_{\sigma} dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy = \int_0^1 (x - x^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Найти площадь области, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (рис. 29).

Р е ш е н и е. Вычисления удобно проводить в полярной системе координат. Полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, запишем уравнение лемнискаты в полярных координатах:

$$r^2=a^2\sin 2\varphi.$$

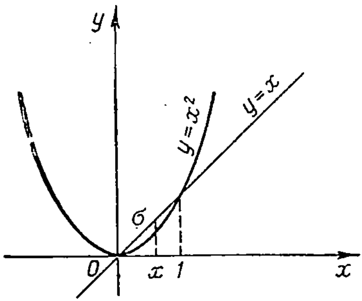

Рис. 28

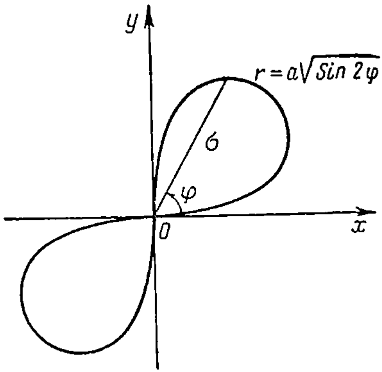

Рис. 29

Обозначим через σ часть области, ограниченной лемнискатой и лежащей в первом квадранте декартовой плоскости. Тогда

$$S=2\iint\limits_{\gamma} r\,dr\,d\varphi,$$

где

$$\gamma: \begin{cases} 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2, \\ 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi}. \end{cases}$$

Поэтому

$$S=2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,dr=\int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin 2\varphi\,d\varphi=a^2\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=a^2.$$

Пример 3. Найти площадь области, лежащей в первой четверти плоскости xOy и ограниченной линиями $xy=1$, $xy=4$, $y=2x$, $y=3x$ (рис. 30).

Р е ш е н и е. Введем криволинейные координаты u и v, удовлетворяющие соотношениям

$$xy=u^2 \quad (1\leqslant u\leqslant 2);$$
$$y=vx \quad (2\leqslant v\leqslant 3).$$

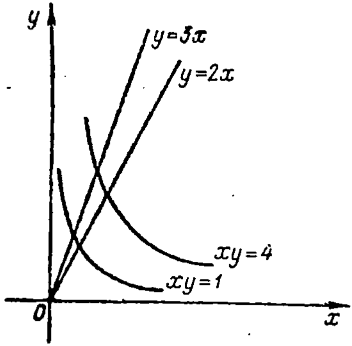

Рис. 30

Из этих соотношений получаем формулы преобразования криволинейных координат u и v в декартовы:

$$x=u/\sqrt{v}, \quad y=u\sqrt{v}.$$

Находим якобиан преобразования:

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{v}} & -\dfrac{u}{2v\sqrt{v}} \\ \sqrt{v} & \dfrac{1}{2}\dfrac{u}{\sqrt{v}} \end{vmatrix}=\frac{u}{v}.$$

Применяя формулу (5.5), получаем

$$S=\iint\limits_{\gamma}|J|\,dudv=\iint\limits_{\gamma}\frac{u}{v}\,dudv=\int\limits_1^2 udu\int\limits_2^3\frac{dv}{v}=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

§ 3. Объем тела

В трехмерном пространстве $Oxyz$ рассмотрим тело Q, проекция которого на плоскость xOy есть область Ω (рис. 31).

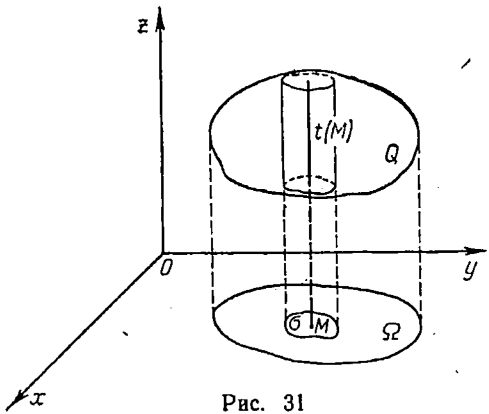

Рис. 31

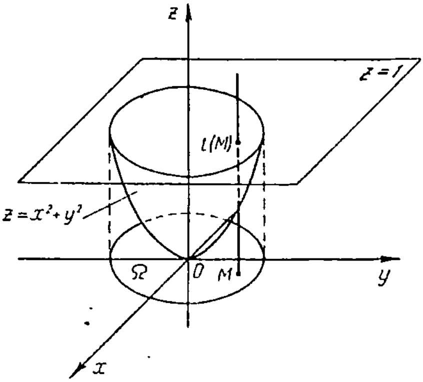

Рис. 32

Функция $V(\sigma)$, численно равная объему части тела Q, расположенной над частичной областью σ области Ω, аддитивна.

Обозначим через $t(M)$ длину сечения тела Q прямой, которая параллельна оси Oz и проходит через точку M области Ω, и предположим, что эта функция непрерывна. Объем $V(\sigma)$ при достаточно малом диаметре области σ приближенно равен объему цилиндра с основанием σ и высотой, равной поперечному сечению тела в некоторой внутренней точке M области σ. Иначе,

$$dV = t(M)\,dS.$$

Отсюда

$$V(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} t(M)\,dS. \tag{5.6}$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ (рис. 32).

Решение. Заданное тело проектируется на плоскость xOy в круг

$$\Omega : x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Далее, длина поперечного сечения тела $t(M) = t(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$. Поэтому объем тела

$$V = \iint\limits_{\Omega} [1 - (x^2 + y^2)]\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$V = \iint\limits_{\Gamma} (1 - r^2)\,r\,dr\,d\varphi,$$

где

$$\Gamma : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

§ 4. Площадь поверхности

Допустим сначала, что в плоскости Q пространства $Oxyz$ расположена плоская фигура Г (рис. 33). Тогда, как известно,

$$S = \Pi |\cos\gamma|, \tag{5.7}$$

где П — площадь фигуры Г, S — площадь ее проекции на плоскость xOy, γ — угол между нормалями к плоско-

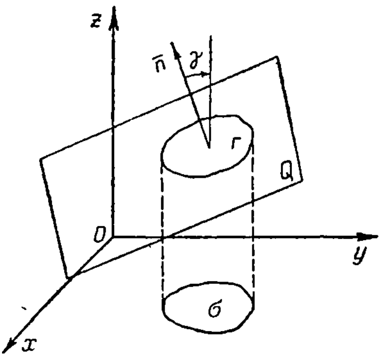

Рис. 33

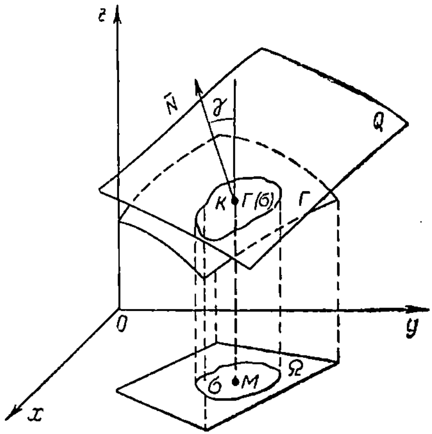

Рис. 34

стям Q и xOy (т. е. угол между нормалью к плоскости Q и осью Oz).

Предполжим теперь, что Г есть поверхность, заданная уравнением

$$z = \varphi(M) = \varphi(x, y),$$

где функция $\varphi(M)$ имеет непрерывные частные производные $p = z'_x$, $q = z'_y$ в области Ω, являющейся проекцией поверхности Г на плоскость xOy (рис. 34).

Обозначим через $\Gamma(\sigma)$ часть поверхности Г, лежащей над частичной областью σ области Ω, и через $\Pi(\sigma)$ — ее площадь. Очевидно, что $\Pi(\sigma)$ — аддитивная функция от σ. Пусть K — точка поверхности Г, лежащая над точкой M области Ω. Проведем через точку K плоскость Q, касательную к поверхности.

Если σ — область бесконечно малого диаметра, содержащая точку M, то $\Pi(\sigma)$ с точностью до бесконечно малой высшего порядка равна площади части плоскости Q, лежащей над этой областью. Следовательно, используя равенство (5.7), имеем

$$d\Pi = \frac{dS}{|\cos\gamma|}, \tag{5.8}$$

где γ — угол между нормалью к поверхности Γ в точке K и осью Oz. Известно, что вектор нормали к поверхности

$$\mathbf{N} = -p\mathbf{i} - q\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Отсюда

$$\cos\gamma = \frac{1}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

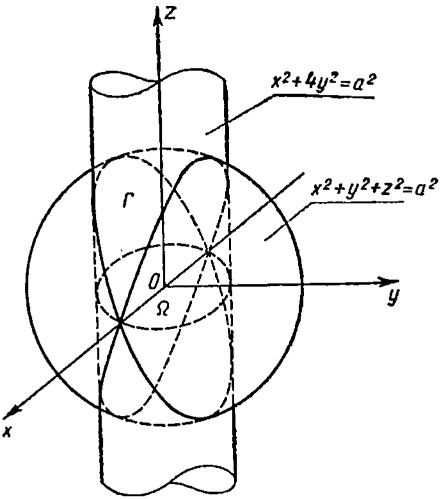

Рис. 35

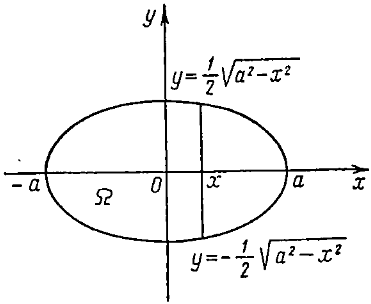

Рис. 36

Учитывая равенство (5.8), получаем

$$d\Pi = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dS, \tag{5.9}$$

следовательно,

$$\Pi(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dS. \tag{5.10}$$

Пример. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезаемую эллиптическим цилиндром $x^2+4y^2=a^2$ (рис. 35).

Решение. Так как поверхность симметрична относительно плоскости xOy, то достаточно вычислить площадь ее верхней части Γ. Проекцией поверхности Γ на плоскость xOy является область Ω, ограниченная эллипсом $x^2+4y=a^2$ (рис. 36). Уравнение поверхности Г имеет вид

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

поэтому

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Следовательно, площадь Г

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=a\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\int\limits_{-a}^{a}\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=2a\arcsin\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}dx=2a\cdot\frac{\pi}{6}\cdot 2a=\frac{2}{3}\pi a^2.$$

Площадь всей поверхности равна $\frac{4}{3}\pi a^2$.

§ 5. Масса пластинки

Найдем массу пластинки, занимающей область Ω плоскости xOy, при известной ее поверхностной плотности $\rho(M)$. Обозначим массу части σ пластинки через $m(\sigma)$. Очевидно, что $m(\sigma)$ — аддитивная функция.

Из определения поверхностной плотности следует, что

$$\rho(M)=\lim\frac{m(\sigma)}{S(\sigma)},$$

если область σ стягивается к точке M. Следовательно,

$$dm=\rho(M)\,dS$$

или

$$m(\sigma)=\iint\limits_{\sigma}\rho(M)\,dS. \qquad (5.11)$$

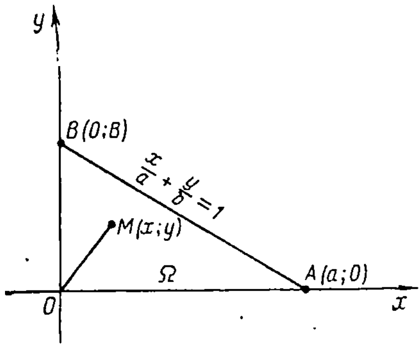

Рис. 37

Пример. Пластинка имеет форму прямоугольного треугольника, катеты которого a и b. Найти массу этой пластинки, если ее плотность в любой точке равна квадрату расстояния точки от вершины прямого угла (рис. 37).

Решение. Направим оси координат по катетам треугольника. Тогда $\rho(M)=\rho(x,\ y)=$ $=x^2+y^2$. Следовательно, масса пластинки

$$m=\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b(1-x/a)}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^a (x^2y+y^3/3)\Bigg|_0^{b(1-x/a)}dx=$$

$$=\int\limits_0^a\left[[bx^2(1-x/a)+\frac{1}{3}b^3(1-x/a)^3\right]dx=\frac{ab\,(a^2+b^2)}{12}.$$

§ 6. Статические моменты и центр масс пластинки

Обозначим через $M_x(\sigma)$ и $M_y(\sigma)$ статические моменты относительно осей Ox и Oy части σ пластинки Ω, рассмотренной в предыдущем параграфе (рис. 38). Найдем элементы этих аддитивных функций.

Статический момент бесконечно малой по диаметру области σ, содержащей точку $M(x;\ y)$, с точностью до бесконечно малых высших порядков равен произведению массы пластинки на соответствующую координату точки M. Таким образом,

$$dM_x = y\,dm = y\rho(x, y)\,dS,$$
$$dM_y = x\,dm = x\rho(x, y)\,dS.$$

Поэтому

$$M_x(\sigma) = \iint_{\sigma} y\rho(x, y)\,dS; \tag{5.12}$$

$$M_y(\sigma) = \iint_{\sigma} x\rho(x, y)\,dS. \tag{5.13}$$

Как известно, центром масс пластинки называется точка плоскости $C(x_c; y_c)$, обладающая следующим свойством: если в точке C поместить массу всей пластинки, то ее статический момент относительно любой оси равен статическому моменту пластинки относительно той же оси. Таким образом,

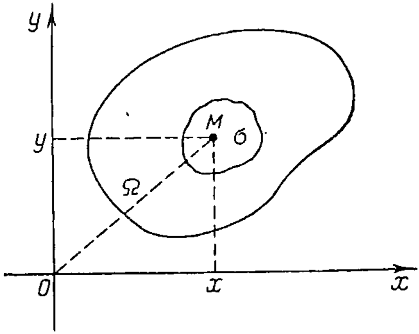

Рис. 38

$$m(\sigma)x_C = M_y(\sigma),$$
$$m(\sigma)y_C = M_x(\sigma).$$

Отсюда, учитывая формулы (5.11) —(5.13), имеем

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\sigma} x\rho dS}{\iint\limits_{\sigma} \rho dS}; \tag{5.14}$$

$$y_C = \frac{\iint\limits_{\sigma} y\rho dS}{\iint\limits_{\sigma} \rho dS}. \tag{5.15}$$

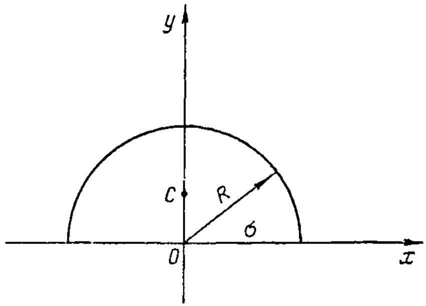

Рис. 39

Если пластинка однородная, т. е. если плотность $\rho(M)$ постоянна, то формулы (5.14) и (5.15) принимают соответственно вид:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\sigma} x dS}{\iint\limits_{\sigma} dS} = \frac{\iint\limits_{\sigma} x dS}{S(\sigma)}, \tag{5.16}$$

$$y_C = \frac{\iint\limits_{\sigma} y\,dS}{\iint\limits_{\sigma} dS} = \frac{\iint\limits_{\sigma} y\,dS}{S(\sigma)}. \qquad (5.17)$$

Пример. Найти центр масс однородной пластинки, имеющей форму полукруга радиуса R.

Решение. Направим ось Ox прямоугольной системы координат по прямолинейной кромке пластинки, а начало координат поместим в центре круга (рис. 39). Так как пластинка симметрична относительно оси Oy, то центр масс находится на этой оси, т. е. $x_c=0$. Вводя полярные координаты, имеем

$$\iint\limits_{\sigma} y\,dS = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r\sin\varphi\, r\,dr = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 dr = \frac{2}{3} R^3.$$

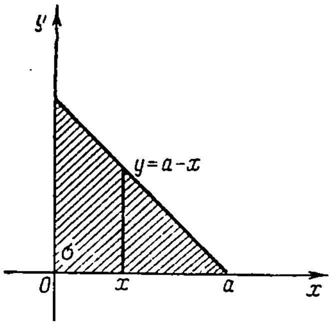

Рис. 40

Таким образом,

$$y_C = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0{,}4R.$$

§ 7. Моменты инерции пластинки

Обозначим через $I_x(\sigma)$, $I_y(\sigma)$ и $I_0(\sigma)$ моменты инерции пластинки σ относительно осей координат и относительно начала координат. Все эти три функции аддитивны. Имеем (см. рис. 38):

$$dI_x = y^2 dm = y^2 \rho\, dS,\ dI_y = x^2 \rho\, dS,\ dI_0 = (x^2+y^2)\rho\, dS.$$

Отсюда следует, что

$$I_x(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} y^2 \rho(x, y)\, dS; \qquad (5.18)$$

$$I_y(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} x^2 \rho(x, y)\, dS; \qquad (5.19)$$

$$I_0(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2) \rho(x, y)\, dS. \qquad (5.20)$$

Из этих формул видно, что

$$I_x(\sigma) + I_y(\sigma) = I_0(\sigma). \qquad (5.21)$$

Пример. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ (рис. 40).

Решение. Имеем:

$$I_x=I_y=\iint_\sigma y^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^{a-x} y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^a (a-x)^3dx= =a^4/12.$$

Окончательно получим

$$I_0=I_x+I_y=2I_x=a^4/6.$$

ГЛАВА VI

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Аддитивная функция пространственной области и тройной интеграл

Определение и свойства аддитивной функции пространственной области в основном совпадают с определением и свойствами аддитивных функций плоской области и промежутка. Единственным отличием является то, что здесь основная область Ω и ее частичные области σ суть части трехмерного пространства.

Примерами аддитивных функций пространственной области σ являются ее объем $V(\sigma)$, масса $m(\sigma)$, количество теплоты $Q(\sigma)$ и т. д.

Аддитивная функция пространственной области называется *непрерывной*, если ее значение на любой частичной области, объем которой равен нулю, также равно нулю. Таким образом, значения непрерывной аддитивной функции пространственной области на множестве, состоящем из конечного числа точек, на линии конечной длины, на поверхности конечной площади равны нулю. В дальнейшем рассматриваются только непрерывные аддитивные функции.

Число p называется *плотностью* аддитивной функции $F(\sigma)$ пространственной области σ в точке $M\in\Omega$, если

$$\lim\frac{F(\sigma)}{V(\sigma)}=p, \qquad (6.1)$$

когда область σ стягивается к точке M.

Аддитивная функция называется *дифференцируемой*, если она имеет плотность в любой точке основной области Ω. В этом случае ее плотность есть функция точки: $p=p(M)=p(x, y, z)$, определенная в области Ω. Справедлива формула

$$dF=pdV, \tag{6.2}$$

равносильная формуле (6.1) для элемента dF дифференцируемой аддитивной функции $F(\sigma)$ пространственной области σ. Поэтому плотность аддитивной функции пространственной области

$$p=\frac{dF}{dV}.$$

Аддитивная функция $F(\sigma)$ пространственной области σ называется *тройным интегралом* от заданной в области Ω функции точки $f(M)$, если

$$\frac{dF}{dV}=f(M). \tag{6.3}$$

При этом применяется обозначение:

$$F(\sigma)=\iiint\limits_{\sigma} f(M)\,dV. \tag{6.4}$$

Нет надобности подробно останавливаться на свойствах тройного интеграла, так как они полностью совпадают с соответствующими свойствами двойного и определенного интегралов.

§ 2. Вычисление тройного интеграла

Способ 1. Допустим, что проекцией области σ трехмерного декартового пространства $Oxyz$ на ось Oz является промежуток $[c, d]$. Обозначим через $\sigma(z)$ сечение области σ плоскостью, перпендикулярной оси Oz и проходящей через точку z промежутка $[c, d]$ (рис. 41). Выражение

$$\int\limits_c^d dz \iint\limits_{\sigma(z)} f(x, y, z)\,dx\,dy \tag{6.5}$$

называется *повторным интегралом первого типа* от функции $f(x, y, z)$ по области σ. Повторный интеграл (6.5) находят следующим образом: сначала вычисляется внутренний двойной интеграл при фиксированном z, а затем полученная функция интегрируется по переменной z.

Тем же способом, что для повторного интеграла (4.13), показывается, что интеграл (6.5) есть аддитивная функция пространственной области σ.

Теорема 6.1. *Справедливо равенство*

$$\iiint\limits_{\sigma} f(M)\,dV = \int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{\sigma(z)} f(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (6.6)$$

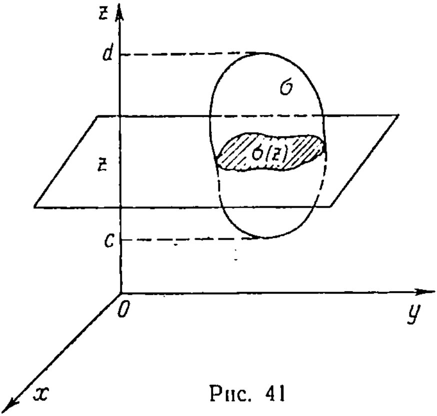

Рис. 41

Доказательство. Достаточно показать, что плотность повторного интеграла равна плотности тройного интеграла, т. е. $f(M)$. Двойной интеграл

$$\iint\limits_{\sigma(z)} dx\,dy = t(z),$$

как известно (см. формулу (5.4)), численно равен площади поперечного сечения $\sigma(z)$ тела σ.

Так как определенный интеграл от площади поперечного сечения тела равен объему этого тела (см. формулу (3.4)), то

$$\int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{\sigma(z)} dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} t(z)\,dz = V(\sigma).$$

Пусть теперь M_0 — произвольная точка области Ω и σ — частичная область, содержащая точку M_0 (рис. 42). Обозначая повторный интеграл через $\Phi(\sigma)$, имеем

$$\Phi(\sigma) - f(M_0)\,V(\sigma) = \int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{\sigma(z)} f(x, y, z)\,dx\,dy -$$

$$- f(M_0) \int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{\sigma(z)} dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{\sigma(z)} [f(M) - f(M_0)]\,dx\,dy.$$

Отсюда

$$|\Phi(\sigma)-f(M_0)V(\sigma)|\leqslant\int\limits_c^d dz\iint\limits_{\sigma(z)}|f(M)-f(M_0)|\,dxdy\leqslant$$

$$\leqslant\alpha(\sigma)\int\limits_c^d dz\iint\limits_{\sigma(z)}dxdy=\alpha(\sigma)V(\sigma),$$

где $\alpha(\sigma)=\max|f(M)-f(M_0)|$ в области σ. Разделив последнее неравенство на $V(\sigma)$, получаем

$$\left|\frac{\Phi(\sigma)}{V(\sigma)}-f(M_0)\right|\leqslant\alpha(\sigma). \qquad (6.7)$$

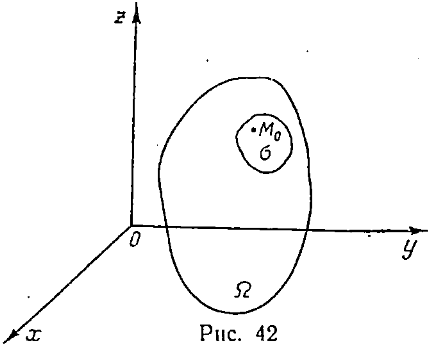

Рис. 42

Так как функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то $\alpha(\sigma)\to 0$ при стягивании области σ к точке M_0. Поэтому

$$\lim\frac{\Phi(\sigma)}{V(\sigma)}=f(M_0),$$

если область σ стягивается к точке M_0.

Итак, показано, что плотность повторного интеграла в произвольной точке области Ω равна подынтегральной функции и, таким образом, установлена справедливость равенства (6.6).

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_\sigma(x+y+z)\,dV$ по области σ, ограниченной параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$ (рис. 43).

Решение. Проекцией области σ на ось Oz является промежуток $[0, 1]$, поэтому

$$\iiint\limits_\sigma(x+y+z)\,dV=\int\limits_0^1 dz\iint\limits_{\sigma(z)}(x+y+z)\,dxdy,$$

где $\sigma(z)$ есть круг $x^2+y^2 \leqslant z$ плоскости радиуса $\sqrt{z}$ с центром в начале координат (рис. 44). Таким образом,

$$\iint\limits_{\sigma(z)} (x+y+z)\,dxdy = \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{+\sqrt{z-x^2}} (x+y+z)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left(xy + \frac{y^2}{2} + zy\right) \Bigg|_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dx = 2\int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} (x+z)\sqrt{z-x^2}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} x\sqrt{z-x^2}\,dx + 2z\int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z-x^2}\,dx.$$

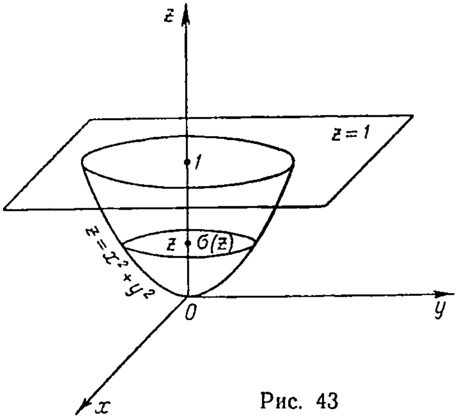

Рис. 43

Первый из интегралов в правой части последнего равенства равен нулю. Во втором интеграле заменим переменную интегрирования по формуле $x=\sqrt{z}\sin t$. Тогда получим

$$\int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z-x^2}\,dx = z\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = z\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{z}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{z}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}z.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma(z)} (x+y+z)\,dx\,dy = \pi z^2.$$

Окончательно имеем

$$\iiint_{\sigma} (x+y+z)\,dV = \pi \int_0^1 z^2 dz = \pi/3.$$

Способ 2. Обозначим через γ проекцию области σ на плоскость xOy и через $\sigma(x, y)$ сечение области σ пря-

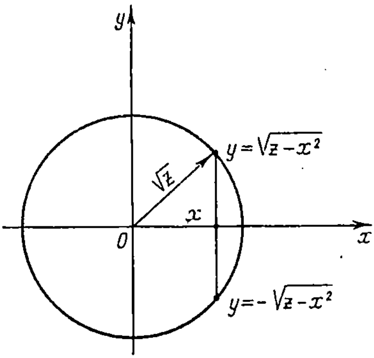

Рис. 44

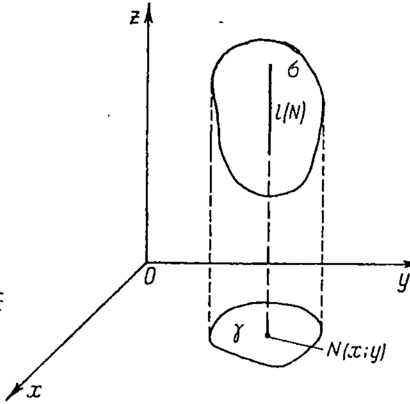

Рис. 45

мой, параллельной оси Oz и проходящей через точку $N(x; y)$ области γ (рис. 45).

Выражение

$$\iint_{\gamma} dx\,dy \int_{\sigma(x,y)} f(x, y, z)\,dz \tag{6.8}$$

называется *повторным интегралом второго типа* по области σ.

Этот интеграл находится следующим образом: сначала вычисляется по z определенный интеграл по промежутку $\sigma(x, y)$, а затем полученная функция переменных x и y интегрируется по области γ плоскости xOy.

Повторный интеграл (6.8) является аддитивной функцией пространственной области σ.

Теорема 6.2. *Имеет место равенство*

$$\iiint_{\sigma} f(M)\,dV = \iint_{\gamma} dx\,dy \int_{\sigma(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{6.9}$$

Доказательство. Как и раньше, достаточно установить, что плотность повторного интеграла равна $f(M)$. Интеграл

$$\int\limits_{\sigma(N)} dz = t(N) = t(x, y)$$

численно равен длине сечения тела σ прямой, параллельной оси Oz и проходящей через точку N плоской области γ. По формуле (5.6) имеем

$$\iint\limits_{\gamma} dxdy \int\limits_{\sigma(N)} dz = \iint\limits_{\gamma} t(x, y)\,dxdy = V(\sigma).$$

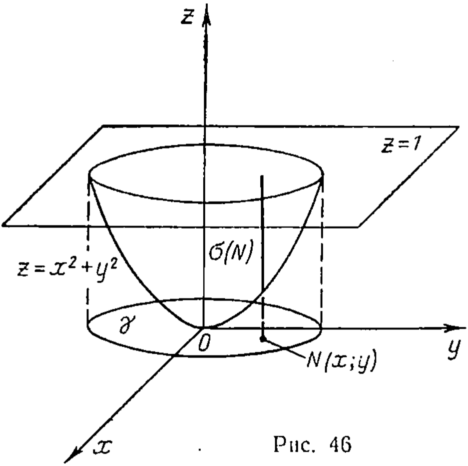

Рис. 46

Пусть теперь M_0 — произвольная точка пространственной области Ω и σ — частичная область, содержащая точку M_0. Обозначая через $\Phi(\sigma)$ повторный интеграл в правой части равенства (6.9) и проводя те же выкладки, что и при доказательстве равенства (6.6), получим неравенство (6.7), откуда следует, что плотность повторного интеграла равна подынтегральной функции.

Пример. Пользуясь формулой (6.9), вычислить рассмотренный ранее интеграл $\iiint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,dV$ по области σ, ограниченной поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=1$ (рис. 46).

Решение. Проекцией γ области σ на плоскость xOy является круг радиуса 1 с центром в начале координат. Сечение $\sigma(N)$ области σ есть отрезок прямой, аппликаты концов которого $z=x^2+y^2$ и $z=1$. Поэтому

$$\iiint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,dV=\iint\limits_{\gamma}dxdy\int\limits_{x^2+y^2}^{1}(x+y+z)\,dz=$$

$$=\iint\limits_{\gamma}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2+y^2}^{1}dxdy=\iint\limits_{\gamma}\Bigg[x+y+\frac{1}{2}-$$

$$-x(x^2+y^2)-y(x^2+y^2)-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\Bigg]dxdy.$$

В двойном интеграле, находящемся в правой части равенства, перейдем к полярным координатам. Тогда получим

$$\iiint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,dV=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{1}[r\cos\varphi+r\sin\varphi+1/2-$$

$$-(r\cos\varphi+r\sin\varphi)r^2-r^4/2]\,rdr=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\varphi d\varphi+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\varphi d\varphi-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\varphi d\varphi-\frac{1}{12}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

§ 3. Преобразование пространственной области в пространственную область. Криволинейные координаты в пространстве

Преобразование области D трехмерного декартового пространства $Ouvw$ в область Ω трехмерного декартового пространства $Oxyz$ осуществляется с помощью следующих формул преобразования:

$$\begin{aligned} x&=x(u,v,w),\\ y&=y(u,v,w),\\ z&=z(u,v,w). \end{aligned}\tag{6.10}$$

Эти формулы преобразования дают возможность найти образ $M(x,y,z)$ по ее прообразу $N(u,v,w)$.

Если преобразование взаимно однозначное (это в дальнейшем всегда предполагается), то соотношения (6.10) можно обратить и получить формулы обратного преобразования области Ω в область D:

$$\begin{aligned} u&=u(x, y, z), \\ v&=v(x, y, z), \\ w&=w(x, y, z). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Преобразование (6.10) называется *непрерывным*, если x, y, z суть непрерывные функции переменных u, v, w и *дифференцируемым* (или *гладким*), если функции x, y, z имеют непрерывные частные производные по переменным u, v, w.

Можно показать, что преобразование, обратное непрерывному преобразованию, также непрерывно. Преобразование, обратное дифференцируемому, является дифференцируемым, если определитель Якоби (или якобиан) преобразования

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

отличен от нуля.

Как и в случае плоскости, числа u, v, w можно считать *криволинейными координатами* точки M. Соотношения (6.10) являются формулами преобразования криволинейных координат точки M в ее декартовы координаты, а соотношения (6.11) — формулами обратного преобразования декартовых координат точки в ее криволинейные координаты.

Если в формулах (6.11) зафиксировать числа u, v и w, то получится тройка поверхностей пространства $Oxyz$, называемых *координатными поверхностями*. Тройка координатных поверхностей пересекается только в точке, криволинейные координаты которой u, v и w.

Например, известно, что преобразование сферических координат ρ, φ, ψ точки в ее декартовы координаты осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi\sin\psi, \\ y&=\rho\sin\varphi\sin\psi, \\ z&=\rho\cos\psi. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\varphi=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+\pi\sigma(y),$$

$$\psi=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

где $\sigma(y)=0$ при $y>0$ и $\sigma(y)=1$ при $y<0$. Фиксируя

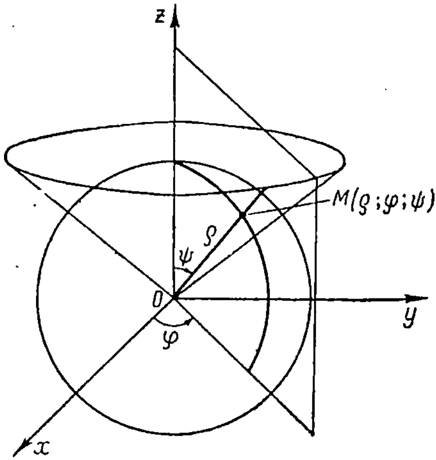

Рис. 47

в последних формулах переменные ρ, φ, ψ, получаем тройку координатных поверхностей

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho,$$

$$\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+\pi\sigma(y)=\varphi,$$

$$\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\psi.$$

Первая из этих поверхностей есть сфера радиуса ρ с центром в начале координат, вторая — полуплоскость, исходящая из оси Oz под углом φ к оси Ox, третья — прямой круговой конус с вершиной в начале координат и с прямолинейными образующими, угол наклона которых к оси Oz равен ψ (рис. 47).

§ 4. Коэффициент искажения при преобразовании пространственной области в пространственную область

Предположим, что преобразование (6.10) области D в область Ω непрерывно. Тогда образ σ произвольной частичной области γ области D является частичной областью области Ω. Как и в случае плоскости, доказывается, что объем $V(\sigma)$ области σ является *аддитивной функцией* ее прообраза γ. Плотность этой аддитивной функции, т. е.

$$\lim \frac{V(\sigma)}{V(\gamma)} = K(N),$$

когда область γ стягивается к точке N, называется *коэффициентом искажения* преобразования (6.10) в точке N.

Теорема 6.3. *Коэффициент искажения дифференцируемого преобразования равен абсолютной величине якобиана преобразования*:

$$K(N) = |J(N)| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \right|. \tag{6.14}$$

Доказательство. Для простоты предположим, что коэффициент искажения существует и надо только его вычислить. Тогда в качестве γ можно взять любую область пространства $Ouvw$, стягивающуюся к точке N. Удобней всего считать, что γ есть прямоугольный параллелепипед с вершинами (рис. 48)

$$N(u, v, w),\ N_1(u+\Delta u, v, w),\ N_2(u, v+\Delta v, w),$$
$$N_3(u, v, w+\Delta w),$$
$$N_4(u, \Delta u, v, \Delta v, w),\ N_5(u+\Delta u, v, w+\Delta w),$$
$$N_6(u, v+\Delta v, w+\Delta w),\ N_7(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w).$$

В пространстве $Oxyz$ вершинам параллелепипеда соответствуют точки $M(x;\ y;\ z)$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$,... с координатами

$$\begin{array}{lll} x = x(u, v, w), & y = y(u, v, w), & z = z(u, v, w), \\ x_1 = x + \Delta_u x, & y_1 = y + \Delta_u y, & z_1 = z + \Delta_u z, \\ x_2 = x + \Delta_v x, & y_2 = y + \Delta_v y, & z_2 = z + \Delta_v z, \\ x_3 = x + \Delta_w x, & y_3 = y + \Delta_w y, & z_3 = z + \Delta_w z, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Так как функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ имеют непрерывные частные производные, то восьмиугольник σ с вершинами M, M_1, ..., M_7 близок к параллелепипеду, четыре вершины которого суть M, M_1, M_2, M_3. Следовательно, объем области σ с точностью до бесконечно малых высших порядков равен объему этого па-

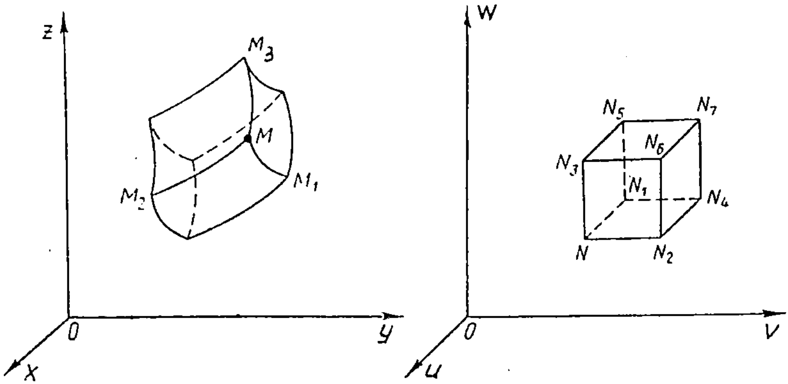

Рис. 48

раллелепипеда. Из курса аналитической геометрии известно, что объем такого параллелепипеда равен абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$V(\sigma) \approx \left| \begin{vmatrix} \Delta_u x & \Delta_v x & \Delta_w x \\ \Delta_u y & \Delta_v y & \Delta_w y \\ \Delta_u z & \Delta_v z & \Delta_w z \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} & \frac{\Delta_v x}{\Delta v} & \frac{\Delta_w x}{\Delta w} \\ \frac{\Delta_u y}{\Delta u} & \frac{\Delta_v y}{\Delta v} & \frac{\Delta_w y}{\Delta w} \\ \frac{\Delta_u z}{\Delta u} & \frac{\Delta_v z}{\Delta v} & \frac{\Delta_w z}{\Delta w} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Отсюда следует, что

$$K(N)=\lim \frac{V(\sigma)}{V(\gamma)}=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{V(\sigma)}{\Delta u\,\Delta v\,\Delta w}=$$

$$=\left|\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}\right|,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Подстановка (замена переменных) в тройном интеграле

Теорема 6.4. *Пусть* (6.10) *есть дифференцируемое преобразование области D пространства $Ouvw$ в область Ω пространства $Oxyz$. Тогда для любой частичной области γ области D*

$$\iiint\limits_{\sigma} f(M)\,dV=$$
$$=\iiint\limits_{\gamma} f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))\,|J|\,du\,dv\,dw, \tag{6.15}$$

где σ — образ области γ при преобразовании (6.10).

Доказательство этой теоремы производится точно так же, как доказательство соответствующей теоремы для двойного интеграла (см. теорему 4.14). Разумеется, соотношение (6.15) можно также рассматривать как формулу преобразования тройного интеграла при переходе к криволинейным координатам.

Выведем, например, формулы преобразования тройного интеграла к сферическим и цилиндрическим координатам. Якобиан преобразования (6.12) сферических координат к декартовым координатам

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\psi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\psi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\psi}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\psi & -\rho\sin\varphi\sin\psi & \rho\cos\varphi\cos\psi\\ \sin\varphi\sin\psi & \rho\cos\varphi\sin\psi & \rho\sin\varphi\cos\psi\\ \cos\psi & 0 & -\rho\sin\psi\end{vmatrix}=-\rho^2\sin\psi.$$

Поэтому преобразование тройного интеграла к сферическим координатам производится по формуле

$$\iiint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,dxdydz=$$
$$=\iiint\limits_{\gamma} f(\rho\cos\varphi\sin\psi,\ \rho\sin\varphi\sin\psi,\ \rho\cos\psi)\,\rho^2\sin\psi\, d\rho\, d\varphi\, d\psi. \tag{6.16}$$

Формулы преобразования цилиндрических координат r, φ, z к декартовым координатам имеют вид:

$$\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi,\\ z&=z. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Для якобиана преобразования получаем выражение

$$J=\begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\gamma} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\ r\,dr\,d\varphi\,dz, \tag{6.18}$$

где γ — область изменения цилиндрических координат точек области σ.

§ 6. Вычисление объемов тел с помощью тройных интегралов

Объем $V(\sigma)$ пространственной области σ, как уже отмечалось, является аддитивной функцией области σ. Так как плотность этой аддитивной функции, очевидно, равна единице, то

$$V(\sigma)=\iiint\limits_{\sigma} dV=\iiint\limits_{\sigma} dxdydz. \tag{6.19}$$

Пример 1. Вычислить объем тела σ, ограниченного сферами $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $x^2+y^2+z^2=2Rz$ (рис. 49).

Решение. Переходя к сферическим координатам, получаем

$$V(\sigma)=\iiint\limits_{\sigma} dV=\iiint\limits_{\gamma} \rho^2\sin\psi\, d\rho\, d\varphi\, d\psi,$$

где γ — область изменения сферических координат точек области σ. Граничные сферы пересекаются по окружности

$$K: \begin{cases} z = \dfrac{R}{2}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} R^2. \end{cases}$$

Область σ разбивается конусом с вершиной в начале координат и с прямолинейными образующими, проходящи-

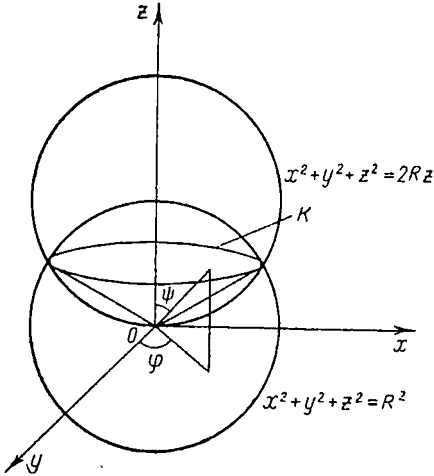

Рис. 49

ми через окружность K, на две частичные области σ_1 и σ_2.

Для области σ_1 область γ_1 изменения сферических координат задается неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi/4$.

Для области σ_2 область γ_2 изменения сферических координат задается неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\pi/4 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2R\cos\psi$. Поэтому

$$V(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^{R} \rho^2 \sin\psi d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2R\cos\psi} \rho^2 \sin\psi d\rho =$$

$$= 2\pi(-\cos\psi)\Big|_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{R} + 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8}{3} R^3 \cos^3\psi \sin\psi d\psi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{16}{3}\pi R^3\left(-\frac{\cos^4\psi}{4}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi R^3}{3} = \pi R^3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

§ 7. Масса тела

Найдем массу $m(\sigma)$ тела, занимающего область σ пространства $Oxyz$, при условии, что известна объемная плотность $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ в каждой точке M этого те-

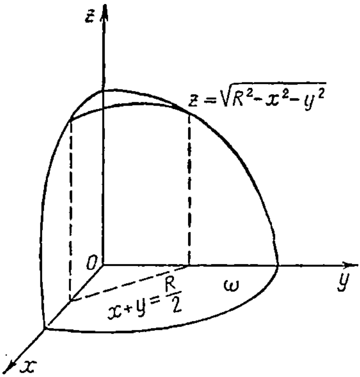

Рис. 50

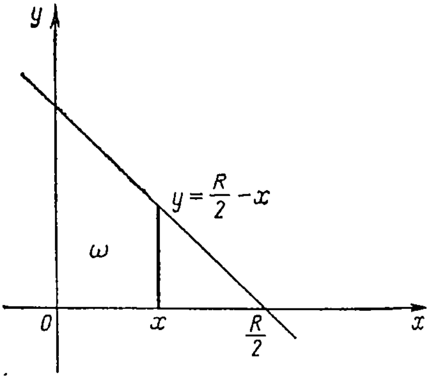

Рис. 51

ла. Очевидно, что $m(\sigma)$ является аддитивной функцией области σ. Согласно определению объемной плотности,

$$\rho(M) = \lim \frac{m(\sigma)}{V(\sigma)}$$

при стягивании области σ к точке M. Поэтому

$$m(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} \rho(M)\,dV. \qquad (6.20)$$

Пример. Из шара радиуса R с центром в начале координат координатными плоскостями и плоскостью $x+y=R/2$ вырезано тело σ. Найти массу этого тела, если плотность его в каждой точке $M(x; y; z)$ равна аппликате этой точки (рис. 50).

Решение. Согласно формуле (6.20)

$$m(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\omega} dx\,dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{\omega}(R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

где ω — треугольник плоскости xOy, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=R/2$ (рис. 51). Далее имеем

$$m(\sigma) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{R/2} dx \int\limits_{0}^{R/2-x}(R^2-x^2-y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{R/2}\left(R^2 y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{R/2-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{R/2}\Big[R^2(R/2-$$

$$-x) - x^2(R/2-x) - \frac{1}{3}(R/2-x)^3\Big]\,dx = \frac{11}{192}R^4.$$

§ 8. Статические моменты и центр масс тела

Найдем статические моменты $M_{xy}(\sigma)$, $M_{xz}(\sigma)$, $M_{yz}(\sigma)$ тела σ, объемная плотность которого в произвольной точке $M(x;\, y;\, z)$ этого тела $\rho(M)=\rho(x,\, y,\, z)$ (рис. 52). Все эти три величины являются аддитивными функциями области σ. Элемент аддитивной функции $M_{xy}(\sigma)$

$$dM_{xy}(\sigma) = z\,dm = z\rho(M)\,dV.$$

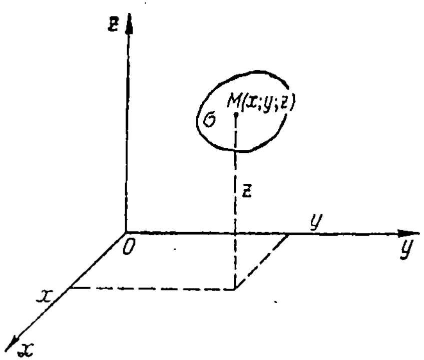

Рис. 52

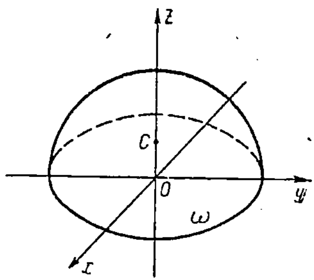

Рис. 53

Отсюда

$$M_{xy}(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} z\rho(M)\,dV. \tag{6.21}$$

Из тех же соображений получаем:

$$M_{xz}(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} y\rho(M)\,dV, \tag{6.22}$$

$$M_{yz}(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} x\rho(M)\,dV. \tag{6.23}$$

Как и для пластинки, координаты центра масс C тела находятся по формулам

$$x_C = \frac{M_{yz}(\sigma)}{m(\sigma)} = \frac{\iiint\limits_{\sigma} x\rho\,dV}{\iiint\limits_{\sigma} \rho\,dV}; \tag{6.24}$$

$$y_C = \frac{M_{xz}(\sigma)}{m(\sigma)} = \frac{\iiint\limits_{\sigma} y\rho\,dV}{\iiint\limits_{\sigma} \rho\,dV}; \tag{6.25}$$

$$z_C = \frac{M_{xy}(\sigma)}{m(\sigma)} = \frac{\iiint\limits_{\sigma} z\rho\,dV}{\iiint\limits_{\sigma} \rho\,dV}. \tag{6.26}$$

Если тело σ однородное (т. е. его объемная плотность постоянна), то ρ можно вынести за знаки интегралов, поэтому формулы для вычисления координат центра масс принимают более простой вид:

$$x_C = \frac{\iiint\limits_{\sigma} x\,dV}{V(\sigma)}, \quad y_C = \frac{\iiint\limits_{\sigma} y\,dV}{V(\sigma)}, \quad z_C = \frac{\iiint\limits_{\sigma} z\,dV}{V(\sigma)}. \tag{6.27}$$

Пример. Найти центр масс однородного полушара радиуса R.

Решение. Выберем систему декартовых координат с началом в центре шара и с плоскостью xOy, совпадающей с диаметральной плоскостью полушара (рис. 53).

Из соображений симметрии следует, что центр масс C тела лежит на оси аппликат. Поэтому надо найти только аппликату точки C. Перейдя к сферическим координатам, получаем

$$\iiint\limits_{\sigma} z\,dV = \iiint\limits_{\gamma} \rho\cos\psi\rho^2\sin\psi\,d\rho\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\psi\sin\psi\,d\psi \int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{\pi R^4}{4}.$$

По третьей из формул (6.27) окончательно находим

$$z_C = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^4} = \frac{3}{8}R.$$

§ 9. Моменты инерции тела

Найдем моменты инерции тела, рассмотренного в предыдущем параграфе (см. рис. 52). Для элемента dI_{xy} аддитивной функции $I_{xy}(\sigma)$, равной моменту инерции тела σ относительно плоскости xOy, имеем

$$dI_{xy} = z^2 dm = z^2 \rho\,dV.$$

Отсюда

$$I_{xy}(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} z^2\rho(M)\,dV. \tag{6.28}$$

Аналогично получаем, что момент инерции тела σ относительно плоскости xOz

$$I_{xz}(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} y^2\rho(M)\,dV, \tag{6.29}$$

а момент инерции тела относительно плоскости yOz

$$I_{yz}(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} x^2\rho(M)\,dV. \tag{6.30}$$

Формулы для вычисления моментов инерции тела относительно координатных осей и относительно начала координат имеют вид:

$$I_x(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)\,\rho(M)\,dV, \tag{6.31}$$

$$I_y(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\,\rho(M)\,dV, \tag{6.32}$$

$$I_z(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\,\rho(M)\,dV, \tag{6.33}$$

$$I_0(\sigma) = \iiint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\,\rho(M)\,dV. \tag{6.34}$$

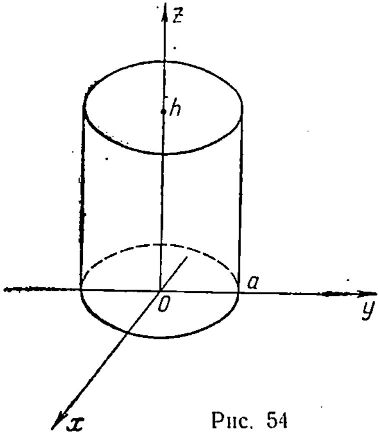

Рис. 54

Пример. Найти момент инерции однородного кругового цилиндра, плотность которого равна единице, высота h и радиус основания a, относительно диаметра основания цилиндра.

Решение. Направим ось Ox декартовой системы координат по диаметру основания и ось Oz по оси цилиндра (рис. 54). Нам нужно найти момент инерции цилиндра относительно оси Ox. По формуле (6.32) имеем

$$I_x = \iiint_{\sigma} (y^2 + z^2)\, dx\,dy\,dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_0^h (r^2 \sin^2\varphi + z^2)\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (r^2 h \sin^2\varphi +$$

$$+ h^3/3)\, r\,dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^4 h}{4} \sin^2\varphi + \frac{a^2 h^3}{6}\right) d\varphi = \frac{\pi}{12} a^2 h (3a^2 + 4h^2).$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ГЛАВА VII

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Аддитивная функция линии и криволинейный интеграл первого рода

Пусть Γ — пространственная линия и γ — произвольная часть этой линии, которая, в частности, может совпадать с Γ или выродиться в точку линии.

Переменная w называется *функцией линии* γ ($w = F(\gamma)$), заданной на множестве частичных линий линии Γ, если каждой из этих частичных линий поставлено в соответствие определенное значение переменной w.

Функция $w = F(\gamma)$ линии γ называется *аддитивной*, если при разбиении произвольной частичной линии γ на две линии γ_1 и γ_2 без общих точек справедливо равенство

$$F(\gamma) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2). \tag{7.1}$$

Очевидно, что свойства аддитивной функции линии совпадают с соответствующими свойствами аддитивных функций промежутка и области. Простейшим примером аддитивной функции линии γ является ее длина $l(\gamma)$.

Аддитивная функция линии называется *непрерывной*, если ее значение на любой выродившейся в точку частичной линии линии Γ равно нулю. В дальнейшем рассматриваются *только* непрерывные аддитивные функции линии.

Условимся считать, что переменная линия γ *стягивается к точке* $M \in \Gamma$, если $M \in \gamma$ и если длина $l(\gamma)$ этой линии стремится к нулю.

Число p называется *плотностью аддитивной функции* $F(\gamma)$ в точке $M \in \Gamma$, если для любой линии γ, стягивающейся к точке M,

$$\lim \frac{F(\gamma)}{l(\gamma)} = p. \tag{7.2}$$

Аддитивная функция $F(\gamma)$, имеющая в любой точке M линии Γ плотность, называется *дифференцируемой*.

Очевидно, что плотность дифференцируемой аддитивной функции есть функция точки линии Г. Как и для рассмотренных ранее аддитивных функций, равенство (7.2) можно представить в следующем равносильном виде:

$$dF = p\,dl, \tag{7.3}$$

где dF — дифференциал или элемент аддитивной функции $F(\gamma)$, dl — элемент длины линии.

Аддитивная функция $F(\gamma)$ линии γ называется *криволинейным интегралом первого рода* по линии γ от заданной на Г функции точки $f(M)$, если ее плотность равна $f(M)$. Это записывается так:

$$F(\gamma) = \int_\gamma f(M)\,dl. \tag{7.4}$$

Нет надобности подробно останавливаться на свойствах криволинейного интеграла первого рода, поскольку они аналогичны рассмотренным ранее свойствам интегралов других типов.

§ 2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Допустим, что линия Г задана в трехмерном пространстве параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{7.5}$$

где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют непрерывные производные в промежутке $[a, b]$.

Теорема 7.1. *Если заданная на линии* Г *функция точки* $f(M) = f(x, y, z)$ *непрерывна, то справедлива формула*

$$\int_\gamma f(M)\,dl = \int_\sigma f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt, \tag{7.6}$$

где σ *частичный промежуток промежутка* $\Omega = [a, b]$, *преобразующийся с помощью соотношений (7.5) в частичную линию* γ *линии* Г.

Доказательство. Нетрудно показать, что интеграл, находящийся в левой части равенства (7.6), является аддитивной функцией промежутка σ. Поэтому для доказательства справедливости равенства (7.6) достаточно установить, что плотность этой функции промежутка равна подынтегральной функции для определенного интеграла, стоящего в правой части равенства.

Как было установлено ранее (см. формулу (3.12)), длина линии γ, заданной параметрическими уравнениями (7.5),

$$l(\gamma)=\int_{\sigma}\sqrt{x'(t)^3+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$$

Поэтому плотность длины линии, как функции промежутка σ, равна $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$. Следовательно, при условии, что промежуток σ стягивается к точке l_0, являющейся прообразом точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ $(x_0=x(l_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0))$, имеем

$$\lim\frac{1}{l(\sigma)}\int_{\gamma}f(x,y,z)\,dl=\lim\frac{1}{l(\gamma)}\int_{\gamma}f(x,y,z)\,dl\cdot\frac{l(\gamma)}{l(\sigma)}=$$

$$=f(x_0,y_0,z_0)\sqrt{x'(t_0)^2+y'(t_0)^2+z'(t_0)^2}=$$

$$=f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))\cdot\sqrt{x'(t_0)^2+y'(t_0)^2+z'(t_0)^2}.$$

Так как t_0 является произвольной точкой промежутка $[a,\ b]$, то справедливость равенства (7.6) полностью доказана.

Для плоской линии Г, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, формула (7.6) принимает вид

$$\int_{\gamma}f(M)\,dl=\int_{\gamma}f(x,y)\,dl=\int_{\sigma}f(x,(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt. \tag{7.7}$$

Для плоской линии, заданной явным уравнением $y=\varphi(x)$, из формулы (7.7) следует равенство

$$\int_{\gamma}f(x,y)dl=\int_{\sigma}f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx. \tag{7.8}$$

Наконец, для плоской линии Г, заданной полярным уравнением $r=r(\varphi)$, формула (7.7) принимает вид

$$\int_{\gamma}f(x,y)\,dl=\int_{\sigma}f(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,d\varphi. \tag{7.9}$$

Пример. Найти центр масс однородной полуокружности Г радиуса R.

Решение. Направим ось Ox прямоугольной системы координат по диаметру окружности, а начало координат поместим в центре окружности (рис. 55). Окружность симметрична относительно оси Oy, поэтому ее центр масс C расположен на этой оси, следовательно его абсцисса $x_c=0$. Далее имеем

$$y_c = \frac{M_x(\Gamma)}{l(\Gamma)},$$

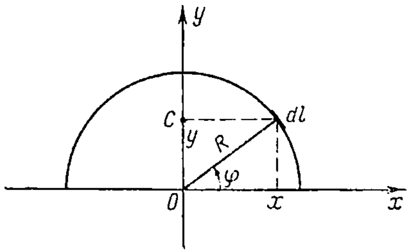

Рис. 55

где M_x — статический момент окружности относительно оси Ox. Очевидно, что статический момент $M_x(\gamma)$ части линии γ является аддитивной функцией линии γ. Для элемента этой функции справедливо выражение

$$dM_x = y\,dl,$$

следовательно,

$$M_x(\Gamma) = \int_\Gamma y\,dl.$$

Так как полярное уравнение полуокружности Γ имеет вид

$$r = R, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

то по формуле (7.9) имеем

$$M_x(\Gamma) = \int_0^\pi R \sin\varphi\, R\,d\varphi = 2R^2.$$

Следовательно,

$$y_C = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R \approx 0{,}6R.$$

§ 3. Криволинейный интеграл второго рода

Предположим теперь, что все частичные линии γ линии Γ направленные. Линию γ, имеющую начало в точке A и конец в точке B, обозначим через AB ($\gamma = AB$) (рис. 56).

Обозначим через $\tau(M)$ единичный вектор касательной к линии γ в ее точке M. Условимся считать, что направление этого вектора совпадает с направлением линии.

Пусть $\mathbf{F}=\mathbf{F}(M)$ вектор-функция точки M, заданная на линии Г. Обозначим через $F_\tau(M)$ проекцию вектора $\mathbf{F}$ на единичный вектор касательной $\tau(M)$. Аддитивная функция линии $\gamma=AB$

$$\Phi(\gamma)=\int_\gamma F_\tau(M)\,dl=\int_{AB} F_\tau(M)\,dl \tag{7.10}$$

называется *криволинейным интегралом второго рода*. Криволинейный интеграл второго рода, кроме обычных для всех интегралов свойств, обладает и некоторыми особенностями.

1. *При изменении направления линии γ криволинейный интеграл второго рода меняет лишь знак*:

$$\int_{BA} F_\tau(M)\,dl=-\int_{AB} F_\tau(M)\,dl. \tag{7.11}$$

В самом деле, при изменении направления линии изменяется на противоположное направление единичного вектора касательной, следовательно, проекция вектора $\mathbf{F}$ на направление вектора τ меняет лишь знак.

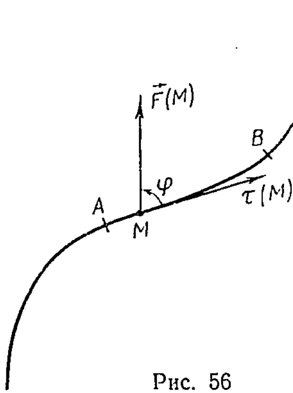

Рис. 56

2. *Для любых трех точек A, B, C линии Г справедливо равенство*

$$\int_{AB} F_\tau(M)\,dl=\int_{AC} F_\tau(M)\,dl+\int_{CB} F_\tau(M)\,dl. \tag{7.12}$$

Доказательство этого равенства производится точно так же, как доказательство второй части теоремы 2.2.

§ 4. Криволинейный интеграл второго рода в декартовой системе координат

Допустим, что в трехмерном пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Тогда единичный вектор касательной к линии γ можно представить в виде

$$\tau=\cos(\widehat{\tau, x})\,\mathbf{i}+\cos(\widehat{\tau, y})\,\mathbf{j}+\cos(\widehat{\tau, z})\,\mathbf{k}, \tag{7.13}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — координатные орты, $\cos(\widehat{\tau, x})$, $\cos(\widehat{\tau, y})$, $\cos(\widehat{\tau, z})$ — направляющие косинусы вектора τ.

Обозначим через $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ проекции вектора $\mathbf{F}(M)$ на координатные оси Ox, Oy, Oz. Тогда

$$\mathbf{F}(M)=P(M)\mathbf{i}+Q(M)\mathbf{j}+R(M)\mathbf{k}. \qquad (7.14)$$

Скалярное произведение векторов $\mathbf{F}$ и τ

$$\mathbf{F}\tau=|\tau|F_\tau=F_\tau .$$

Кроме того,

$$\mathbf{F}\tau=P\cos(\tau,\widehat{\ }x)+Q\cos(\tau,\widehat{\ }y)+R\cos(\tau,\widehat{\ }z),$$

поэтому

$$F_\tau=P(M)\cos(\tau,\widehat{\ }x)+Q(M)\cos(\tau,\widehat{\ }y)+ \\ +R(M)\cos(\tau,\widehat{\ }z). \qquad (7.15)$$

Таким образом, криволинейный интеграл второго рода можно представить в следующей координатной форме:

$$\int_{AB}F_\tau\ (M)\,dl=\int_{AB}[P(M)\cos(\tau,\widehat{\ }x)+Q(M)\cos(\tau,\widehat{\ }y)+ \\ +R(M)\cos(\tau,\widehat{\ }z)]\,dl. \qquad (7.16)$$

Величины $\cos(\tau,\widehat{\ }x)\,dl$, $\cos(\tau,\widehat{\ }y)\,dl$, $\cos(\tau,\widehat{\ }z)\,dl$ суть проекции элемента линии γ на координатные оси Ox, Oy, Oz. Обозначая их через dx, dy и dz соответственно, получаем еще одну координатную форму криволинейного интеграла второго рода:

$$\int_{AB}F_\tau\ (M)\,dl=\int_{AB}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz). \qquad (7.17)$$

§ 5. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Предположим, что линия Γ задана параметрическими уравнениями (7.5). Если обозначить через $\sigma=[\alpha, \beta]$ направленный частичный промежуток промежутка $[a, b]$, соответствующий частичной линии $\gamma=AB$, то из равенств (7.6) и (7.16) следует, что

$$\int_{AB}F_\tau\ (M)\,dl=\int_\alpha^\beta\ [P(x(t), y(t), z(t))\cos(\tau,\widehat{\ }x)+ \\ +Q(x(t), y(t), z(t))\cos(\tau,\widehat{\ }y)+R\ (x(t), y(t), z(t))\times \\ \times\ \cos(\tau,\widehat{\ }z)]\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt. \qquad (7.18)$$

Как известно, при задании линии уравнениями (7.5), имеем

$$\cos(\widehat{\tau, x}) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},$$

$$\cos(\widehat{\tau, y}) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}, \qquad (7.19)$$

$$\cos(\widehat{\tau, z}) = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}.$$

Поэтому равенство (7.18) можно записать в следующей окончательной форме:

$$\int_{AB} F_\tau(M)\,dl = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt. \qquad (7.20)$$

Для линии плоскости xOy равенство (7.20) принимает вид

$$\int_{AB} F_\tau\,dl = \int_{AB} (Pdx + Qdy) = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt. \qquad (7.21)$$

Для линии плоскости xOy, заданной явным уравнением вида $y = \varphi(x)$, формула (7.21) принимает следующий вид:

$$\int_{AB} F_\tau\,dl = \int_{AB} (Pdx + Qdy) = \int_\alpha^\beta [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)]\,dx, \qquad (7.22)$$

где α и β соответственно абсциссы точек A и B.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$$

по дуге параболы $y = x^2$ с началом в точке $A(0; 0)$ и концом $B(1; 1)$.

Решение. Применяя формулу (7.22), получаем

$$\int_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \int_0^1 [x + x^2 + (x - x^2)\,2x]\,dx = \int_0^1 (x - x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

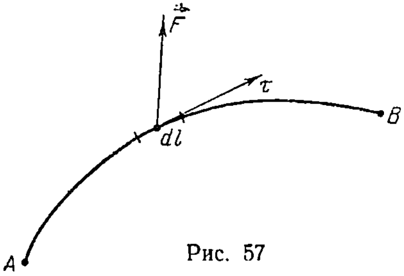

Рис. 57

Пример 2. Найти работу силы $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ по перемещению точки M по винтовой линии $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=4t$ от точки M_1 (2; 0; 0) до точки M_2 (0; 2; 2π).

Решение. Найдем сначала выражение для работы $E(\gamma)$ силы $\mathbf{F}$ по перемещению точки M по дуге $\gamma=AB$ линии Γ (рис. 57). Функция $E(\gamma)$ аддитивна. Вычислим элементарную работу на элементарном участке длины dl.

Так как работу производит только составляющая силы $\mathbf{F}$ по касательной к линии γ, то

$$dE=F_\tau\,dl.$$

Отсюда

$$E(\gamma)=\int\limits_{\breve{AB}} F_\tau\,dl. \tag{7.23}$$

В нашем случае эта формула принимает вид

$$E(\gamma)=\int\limits_{M_1M_2}(xdx-ydy+2zdz)=\int\limits_0^{\pi/2}(-4\cos t\sin t-$$
$$-4\sin t\cos t+32t)\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}(-4\sin 2t+32t)\,dt=4(\pi^2-1).$$

§ 6. Формула Грина

Область Ω плоскости называется *связной*, если две любые ее точки можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в области Ω.

Связная область Ω называется *односвязной*, если ее граница (или иначе контур) Γ состоит из одной непрерывной замкнутой несамопересекающейся линии (рис. 58, *а*).

Связная область Ω называется *n-связной*, если ее контур состоит из n непрерывных замкнутых несамопересекающихся линий Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n, каждая пара которых не имеет общих точек (рис. 58, *б*).

Область, связность которой больше единицы, называется *многосвязной*.

Говорят, что контур Γ области Ω *положительно ориентирован относительно этой области*, если на нем установлено направление, при движении по которому область Ω остается слева. Для односвязной ограниченной области положительная ориентация ее контура означает направление обхода против хода часовой стрелки (рис. 58, *а*).

Контур Γ области Ω считается *отрицательно ориентированным* относительно области Ω, если на нем установ-

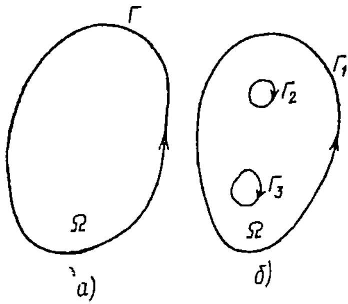

Рис. 58

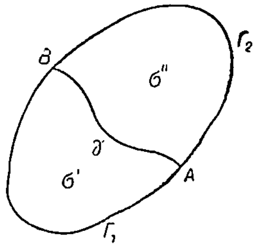

Рис. 59

лено такое направление, что при обходе контура по этому направлению область Ω остается справа.

Теорема 7.2. *Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — две непрерывные функции с непрерывными частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, определенные в ограниченной области Ω плоскости xOy. Тогда для любой частичной области σ области Ω справедлива формула Грина*

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \qquad (7.24)$$

где Γ — *положительно ориентированный контур области* σ.

Доказательство. Прежде всего отметим, что криволинейный интеграл, стоящий в левой части равенства (7.24), есть функция области σ. Покажем, что эта функция области аддитивна. Положим

$$F(\sigma) = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

Разрежем область σ линией γ, концы которой A и B лежат на Γ, на две области σ' и σ'' (рис. 59). Контур Γ' области σ' состоит из части Γ_1 линии Γ и линии γ, а контур Γ'' области σ'' — из части Γ_2 линии Γ и той же линии γ. Имеем

$$F(\sigma')=\int_{\Gamma'} Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy+\int_{AB} Pdx+Qdy,$$

$$F(\sigma'')=\int_{\Gamma''} Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_2} Pdx+Qdy+\int_{BA} Pdx+Qdy.$$

Так как интегралы по направленным линиям AB и BA отличаются только знаком, то после сложения последних равенств получаем:

$$F(\sigma')+F(\sigma'')=\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy+\int_{\Gamma_2} Pdx+Qdy=$$
$$=\int_{\Gamma} Pdx+Qdy=F(\sigma).$$

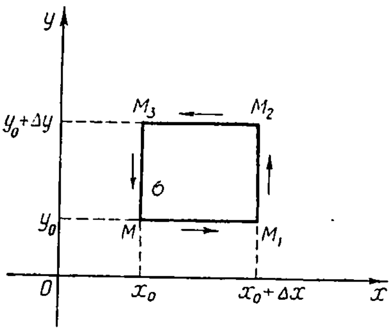

Рис. 60

Итак, доказано, что криволинейный интеграл $F(\sigma)$ является аддитивной функцией области σ.

Найдем плотность функции $F(\sigma)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ области Ω. Для простоты предположим, что σ есть прямоугольник области Ω с вершинами $M_0(x_0;\ y_0)$, $M_1(x_0+\Delta x;\ y_0)$, $M_2(x_0;\ y_0+\Delta y)$, $M_3(x_0+$ $+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ (рис. 60).

Так как контур прямоугольника $\Gamma=M_0M_1+M_1M_2+$ $+M_2M_3+M_3M_0$, то имеем

$$F(\sigma)=\int_{\Gamma} Pdx+Qdy=\int_{M_0M_1}+\int_{M_1M_2}+\int_{M_2M_3}+\int_{M_3M_0} Pdx+Qdy.$$

На отрезке прямой M_0M_1 имеем $y=y_0$. Поэтому

$$\int_{M_0M_1} Pdx+Qdy=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x,\ y_0)\,dx.$$

На отрезке прямой M_1M_2 имеем $x=x_0+\Delta x$, поэтому

$$\int_{M_1M_2} Pdx+Qdy=\iint_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q(x_0+\Delta x,\ y)\,dy.$$

На отрезке прямой M_2M_3 имеем $y=y_0+\Delta y$, следовательно,

$$\int_{M_2M_3} Pdx+Qdy=\int_{x_0+\Delta x}^{x_0} P(x,\ y_0+\Delta y)\,dx=-$$
$$=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x,\ y_0+\Delta y)\,dx.$$

Наконец, на отрезке прямой M_3M_0 имеем $x=x_0$, значит

$$\int\limits_{M_3M_0} Pdx+Qdy=\int\limits_{y_0+\Delta y}^{y_0} Q(x_0, y)\,dy=-\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$F(\sigma)=\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}[Q(x_0+\Delta x, y)-Q(x_0, y)]\,dy-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}[P(x, y_0+\Delta y)-P(x, y_0)]\,dx.$$

Применяя к интегралам, находящимся в правой части равенства, сначала теорему о среднем значении функции, а затем формулу конечных приращений, получим:

$$F(\sigma)=[Q(x_0+\Delta x, \eta_1)-Q(x_0, \eta_1)]\,\Delta y-[P(\xi_2, y_0+\Delta y)-P(\xi_2, y_0)]\,\Delta x=Q'_x(\xi_1, \eta_1)\,\Delta x\Delta y-P'_y(\xi_2, \eta_2)\,\Delta x\Delta y,$$

где ξ_1, ξ_2 точки интервала $(x_0, x_0+\Delta x)$, η_1, η_2 — точки интервала $(y_0, y_0+\Delta y)$.

Учитывая непрерывность частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, из последнего равенства получаем

$$\lim\frac{F(\sigma)}{S(\sigma)}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}[Q'_x(\xi_1, \eta_1)-P'_y(\xi_2, \eta_2)]=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\Bigg|_{M_0}.$$

Таким образом доказано, что плотность криволинейного интеграла равна подынтегральной функции двойного интеграла, находящегося в правой части (7.24).

Из равенства плотностей аддитивных функций в обеих частях равенства (7.24) следует равенство этих аддитивных функций. Теорема доказана.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy,$$

где Γ — окружность $x^2+y^2=1$, имеющая направление обхода против хода часовой стрелки.

Решение. Применяя формулу Грина, получаем

$$\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=\iint\limits_{\sigma}2dxdy=2S(\sigma)=2\pi.$$

Здесь σ — круг, радиус которого равен единице, с центром в начале координат.

§ 7. Вычисление площади области с помощью криволинейных интегралов

Положим в формуле (7.24) $P=0$, $Q=x$. Тогда получим:

$$\int_\Gamma xdy = \iint_\sigma dxdy.$$

Двойной интеграл в правой части равенства, как известно, равен площади $S(\sigma)$ области σ, поэтому

$$S(\sigma) = \int_\Gamma xdy. \qquad (7.25)$$

Положим теперь $P=-y$, $Q=0$. Тогда по формуле Грина получим

$$-\int_\Gamma ydx = \iint_\sigma dxdy,$$

или, иначе,

$$S(\sigma) = -\int_\Gamma ydx. \qquad (7.26)$$

Сложим равенства (7.25) и (7.26) и разделим полученный результат на два. Тогда получим

$$S(\sigma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma (xdy - ydx). \qquad (7.27)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры σ, ограниченной эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Решение. Согласно формуле (7.27) имеем

$$S(\sigma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t d(b\sin t) - b\sin t d(a\cos t)] =$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

§ 8. Независимость плоского криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть Ω — односвязная область плоскости xOy и $P=P(x, y)$, $Q=Q(x, y)$ — две функции, заданные и непрерывные в области Ω. Пусть, далее, A и B — две произвольные точки области Ω.

Говорят, что *криволинейный интеграл*

$$\int_{AB} Pdx+Qdy \tag{7.28}$$

не зависит от пути интегрирования (линии, соединяющей точки A и B), если его величина есть функция только точек A и B (начальной и конечной точек пути).

Покажем, что интеграл (7.28) не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда этот интеграл по любому замкнутому пути равен нулю. Допустим сначала, что интеграл (7.28) не зависит от пути интегрирования. Пусть $ACBDA$ — любой замкнутый контур, лежащий в области Ω (рис. 61). Тогда

$$\int_{ACBDA} Pdx+Qdy=\int_{ACB} Pdx+Qdy+\int_{BDA} Pdx+Qdy. \tag{7.29}$$

Учитывая свойства криволинейного интеграла, имеем

$$\int_{BDA} Pdx+Qdy=-\int_{ADB} Pdx+Qdy. \tag{7.30}$$

Так как, кроме того, интегралы по путям ACB и ADB одинаковы, то интеграл по замкнутому пути $ACBDA$ равен нулю.

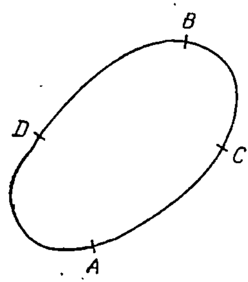

Рис. 61

Обратно, пусть интеграл вида (7.28) по любому замкнутому пути равен нулю. Покажем, что интеграл зависит только от начальной точки A и конечной точки B пути. Соединим точки A и B двумя линиями ACB и ADB. Так как линия $ACBDA$ замкнутая, то интеграл по ней равен нулю. Из равенств (7.29) и (7.30) следует, что

$$\int_{ACB} Pdx+Qdy=-\int_{BDA} Pdx+Qdy=\int_{ADB} Pdx+Qdy.$$

Таким образом, установлено, что условие независимости криволинейного интеграла (7.28) от пути интегрирования совпадает с условием равенства нулю этого интеграла по любому замкнутому пути.

Как было показано в предыдущем параграфе, криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy,$$

где Γ — замкнутая линия, проходимая против хода часовой стрелки, есть аддитивная функция области σ, для которой линия Γ является контуром. Там же было показано, что плотность этой аддитивной функции равна

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

если эти частные производные непрерывны. Из сказанного вытекает следующее предложение.

Теорема 7.3. *Допустим, что функции* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ *непрерывны. Интеграл* (7.28) *не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{7.31}$$

во всех точках области Ω.

Например, для функций $P=x^2+y^2$ и $Q=2xy$ справедливо равенство (7.31). Поэтому интеграл

$$\int_{AB}(x^2+y^2)\,dx+2xy\,dy$$

не зависит от пути интегрирования. Если точки A и B совпадают, то путь интегрирования замкнутый, следовательно, в этом случае интеграл равен нулю.

§ 9. Условие того, что выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом

Сохраним предположения, сделанные в предыдущем параграфе. Выражение $Pdx+Qdy$ называется *полным дифференциалом*, если существует функция двух переменных $u=u(x, y)$, для которой это выражение является полным дифференциалом:

$$du=Pdx+Qdy. \tag{7.32}$$

Как известно, полный дифференциал функции u

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Поэтому, в силу произвольности чисел dx и dy, равенство (7.32) равносильно равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q. \tag{7.33}$$

Теорема 7.4. *Допустим, что частные производные* $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ *непрерывны. Выражение* $Pdx+Qdy$ *является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда выполнено равенство* (7.31).

Доказательство. Предположим сначала, что выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом. Тогда существует функция $u(x, y)$, для которой имеют место равенства (7.33). Продифференцируем первое из равенств по y, а второе — по x. Тогда получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Так как функции $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны, то и смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ также непрерывны, следовательно, как известно, они равны. Таким образом, справедливо равенство (7.31).

Предположим обратное, т. е. что справедливо равенство (7.31). Тогда интеграл (7.28) зависит только от точек A и B. Уместно этот интеграл обозначить символом

$$\int_A^B Pdx+Qdy.$$

Допустим, что точка $A(x_0;\, y_0)$ зафиксирована, а точка $B(x;\, y)$ — переменная. Тогда последний интеграл есть функция только точки B, т. е. переменных x и y. Обозначим эту функцию через $u(x, y)$:

$$u(x,\, y)=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx+Qdy. \tag{7.34}$$

Вычислим частные производные этой функции. Так как интеграл (7.34) зависит только от точек A и B, то его можно вычислять по любому пути, соединяющему эти точки. Соединим точки A и B такой линией ACB, чтобы линия CB являлась отрезком прямой, параллельной оси Ox (рис. 62). Имеем

$$u(x, y)=\int_A^C Pdx+Qdy+\int_C^B Pdx+Qdy.$$

Абсциссу точки C считаем фиксированной и равной x_1. Тогда интеграл

$$\int_A^C Pdx+Qdy$$

является функцией только переменной y. Обозначим эту функцию через $\varphi(y)$. Таким образом,

$$u(x, y) = \varphi(y) + \int\limits_{C}^{B} P\,dx + Q\,dy = \varphi(y) + \int\limits_{x_1}^{x} P(x, y)\,dx.$$

При фиксированном y последний определенный интеграл есть функция верхнего предела x. Как уже известно

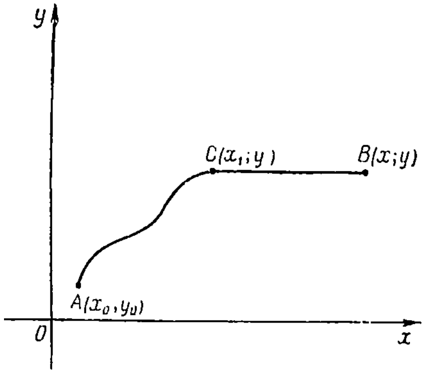

Рис. 62

(см. теорему 2.3), производная такого интеграла равна подынтегральной функции. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Итак, показано, что при выполнении равенства (7.31) существует функция $u(x, y)$, для которой справедливы равенства (7.33). В качестве такой функции можно взять, например, интеграл с переменным верхним пределом (7.34). Теорема доказана.

Назовем функцию $u(x, y)$, для которой имеет место равенство (7.32) (или равенство (7.33)), *первообразной* для полного дифференциала $P\,dx + Q\,dy$. Таких первообразных бесчисленное множество, так как добавление к первообразной произвольной постоянной дает снова первообразную.

С другой стороны, если u и v — две первообразные для полного дифференциала $Pdx+Qdy$, то полные дифференциалы этих функций равны, что может быть тогда и только тогда, когда они отличаются постоянным слагаемым:

$$v=u+C.$$

Пусть теперь $v=v(M)=v(x, y)$ — какая-либо первообразная для полного дифференциала $Pdx+Qdy$. Так как функция (7.34) также является первообразной для рассматриваемого полного дифференциала, то

$$\int\limits_{A(x_0;y_0)}^{B(x;y)} Pdx+Qdy=v(B)+C.$$

Положим в этом равенстве $B=A$. Тогда интеграл по замкнутому контуру в левой части равенства станет равным нулю. Следовательно,

$$v(A)+C=0,$$

откуда $C=-v(A)$. Таким образом,

$$\int\limits_{A}^{B} Pdx+Qdy=v(B)-v(A). \tag{7.35}$$

Формула (7.35) является аналогом формулы Ньютона—Лейбница для определенного интеграла. Например, так как для функций $P=y$, $Q=x$ имеет место равенство (7.31), то выражение $ydx+xdy$ является полным дифференциалом. Первообразной для этого полного дифференциала является функция $v=xy$, так как $d(xy)=ydx+$ $+xdy$. Поэтому

$$\int\limits_{A(1,2)}^{B(2,3)} ydx+xdy=v(B)-v(A)=2\cdot 3-1\cdot 2=4.$$

ГЛАВА VIII

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Поверхностный интеграл первого рода

Аналогично тому, как были введены понятия аддитивных функций промежутка, плоской области и т. д., введем понятие аддитивной функции $F(\sigma)$, заданной на множестве всех частичных поверхностей поверхности Ω.

Простейшим примером аддитивной функции поверхности является ее площадь $\Pi(\sigma)$.

Как и раньше, *плотностью* $p(M)$ аддитивной функции $F(\sigma)$ поверхности σ к точке $M \in \Omega$ будем называть

$$\lim \frac{F(\sigma)}{\Pi(\sigma)},$$

при условии, что поверхность σ стягивается к точке M.

Поверхностным интегралом первого рода от функции точки $f(M)$, заданной на поверхности σ, называется аддитивная функция

$$F(\sigma) = \iint_{\sigma} f(M)\,d\Pi, \tag{8.1}$$

плотность которой равна $f(M)$.

Все выводы, сделанные ранее для аддитивных функций и интегралов других типов, имеют место для аддитивных функций поверхности и поверхностных интегралов первого рода.

Если поверхность Ω задана явным уравнением $z = \varphi(x, y)$, то

$$\iint_{\sigma} f(M)\,d\Pi = \iint_{\sigma} f(x, y, z)\,d\Pi =$$
$$= \iint_{\gamma} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy, \tag{8.2}$$

где $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и γ — область плоскости xOy, являющаяся проекцией поверхности σ на эту плоскость.

Формула (8.3) позволяет привести поверхностный интеграл к двойному интегралу. Ее доказательство проводится тем же способом, что и доказательство равенства (7.6) для криволинейных интегралов первого рода. При этом используется формула (5.10) для площади поверхности.

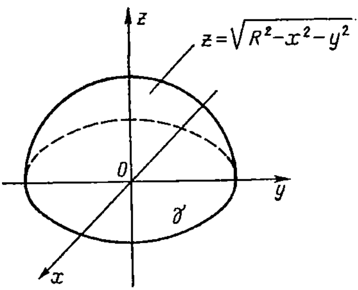

Рис. 63

Пример. Найти центр масс однородной полусферы радиуса R.

Решение. Введем прямоугольную систему

координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy проходила через границу полусферы и начало координат совпадало с центром полусферы (рис. 63). В выбранной системе координат уравнение полусферы имеет вид

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Проекция γ полусферы на плоскость Oxy есть круг радиуса R с центром в начале координат. Так как полусфера симметрична относительно оси Oz, то ее центр масс C находится на этой оси. Остается найти аппликату z_c точки C. Как известно,

$$z_c = \frac{M_{xy}}{\Pi},$$

где M_{xy} — статический момент поверхности относительно плоскости xOy, $\Pi = 2\pi R^2$ — площадь полусферы. Как и раньше получаем, что

$$M_{xy} = \iint_\sigma z d\Pi.$$

Применяя равенство (8.2), имеем

$$M_{xy} = \iint_\gamma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= R \iint_\gamma dxdy = RS(\gamma) = R\pi R^2 = \pi R^3.$$

Таким образом,

$$z_c = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

§ 2. Двусторонние поверхности

Пусть Ω — гладкая поверхность. Тогда из каждой ее точки M можно вывести два противоположно направленных единичных вектора нормалей к поверхности (рис. 64). Если один из этих векторов обозначить через $\mathbf{n}(M)$, то другой, следовательно, будет $-\mathbf{n}(M)$. Выбор одного из двух векторов нормалей определяет *сторону поверхности* Ω *в точке* M; таким образом, таких сторон две.

Дополнительно предположим, что поверхность Ω связная. Это значит, что любые ее две точки можно соединить непрерывной линией, лежащей на поверхности и не пересекающей ее границы (если таковая имеется).

Пусть M_0 — некоторая точка поверхности и $\mathbf{n}(M_0)$ — один из двух векторов нормалей к поверхности в этой точке. Начнем движение из точки M_0 по любой непрерывной линии поверхности, не пересекающей ее границы, следя за непрерывным изменением направления нормали. Если в результате любого такого движения приходим к одному и тому же единичному вектору нормали в каждой точке поверхности, то эта поверхность называется *двусторонней*. В противном случае поверхность называется *односторонней*.

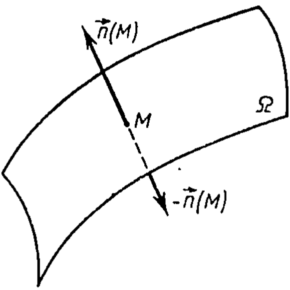

Рис. 64

Если поверхность Ω двусторонняя, то выбор одной ее стороны в какой-либо фиксированной точке M_0 предопределяет выбор стороны поверхности в любой другой ее точке или просто *стороны поверхности*.

Поверхность трехмерного пространства $Oxyz$, заданная явным уравнением $z = \varphi(x, y)$, имеет две стороны —

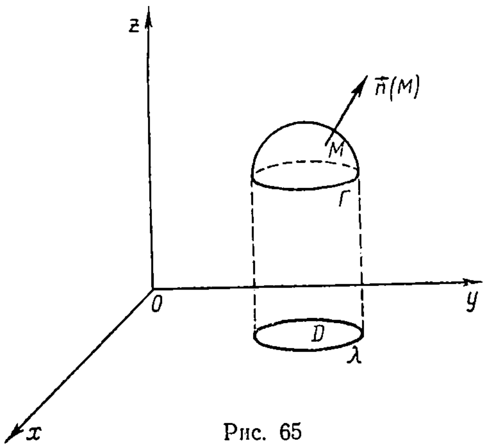

Рис. 65

нижнюю и верхнюю. Единичный вектор нормали к нижней стороне поверхности образует с осью Oz тупой угол, а единичный вектор нормали к верхней стороне — острый угол (рис. 65).

Замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область трехмерного пространства σ, также двусторонняя. Сторона поверхности, нормаль к которой направлена во внешность области σ, называется *внешней стороной* поверхности. Противоположная сторона, нормаль к которой направлена внутрь области σ, называется *внутренней стороной поверхности.*

Примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса. Он получается, если противоположные стороны AD и BC прямоугольника $ABCD$ склеить крест накрест так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка D — с точкой B (рис. 66).

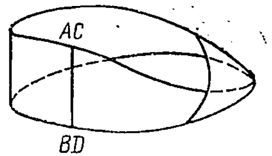

Рис. 66

§ 3. Поверхностные интегралы второго рода

Предположим, что на гладкой поверхности Ω задана вектор-функция $\mathbf{F}=\mathbf{F}(M)$. Пусть σ — двусторонняя частичная поверхность поверхности Ω. Выберем какую-нибудь из двух сторон поверхности σ и обозначим через $\mathbf{n}=\mathbf{n}(M)$ единичный вектор нормали к этой стороне поверхности в точке M. Выражение

$$\iint\limits_{\sigma} F_n(M)\,d\Pi,$$

где $F_n(M)$ есть проекция вектора $\mathbf{F}(M)$ на вектор $\mathbf{n}(M)$, называется *поверхностным интегралом по соответствующей стороне поверхности* σ или *поверхностным интегралом второго рода.*

Очевидно, что поверхностный интеграл второго рода обладает всеми свойствами поверхностного интеграла первого рода. Кроме того, при переходе на другую сторону поверхности σ поверхностный интеграл второго рода меняет лишь знак:

$$\iint\limits_{\sigma} F_{-n}(M)\,d\Pi = -\iint\limits_{\sigma} F_n(M)\,d\Pi. \qquad (8.3)$$

В случае, когда в трехмерном пространстве задана декартова система координат $Oxyz$, имеем

$$\mathbf{F}(M)=P(M)\mathbf{i}+Q(M)\mathbf{j}+R(M)\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n}(M)=\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k},$$

где $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ — скалярные функции и α, β, γ — углы, которые образует вектор $\mathbf{n}(M)$ с осями Ox, Oy, Oz.

Так как вектор $\mathbf{n}(M)$ единичный, то проекция вектора $\mathbf{F}(M)$ на вектор $\mathbf{n}(M)$ равна скалярному произведению этих векторов, поэтому

$$F_n(M)=P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma,$$

следовательно,

$$\iint_\sigma F_n(M)\,d\Pi=\iint_\sigma [P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+ +R(M)\cos\gamma]\,d\Pi. \tag{8.4}$$

Если поверхность σ задана явным уравнением $z=\varphi(x, y)$, то, как известно, вектор нормали к поверхности, образующий с осью Oz острый угол, можно представить в виде

$$\mathbf{N}=-p\mathbf{i}-q\mathbf{j}+\mathbf{k}\quad\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Отсюда следует, что единичный вектор

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\frac{-p\mathbf{i}-q\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{8.5}$$

Используя равенство (8.2), получим

$$\iint_\sigma F_n(M)\,d\Pi=\iint_\gamma [-P(x, y, \varphi(x, y))p- -Q(x, y, \varphi(x, y))q+R(x, y, \varphi(x, y))]\,dxdy, \tag{8.6}$$

где γ — проекция поверхности σ на плоскость xOy.

§ 4. Формула Остроградского

Теорема 7.5. *Пусть в области Ω трехмерного пространства $Oxyz$ заданы три непрерывные функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ с непрерывными частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда для любой частичной области σ области Ω справедлива следующая формула Остроградского*:

$$\iint_\omega (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\Pi= =\iiint_\sigma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV, \tag{8.7}$$

где ω — *внешняя сторона границы области* σ.

Доказательство. Так же, как при доказательстве формулы Грина (см. теорему 7.2), устанавливается, что функция

$$\Phi(\sigma) = \iint_{\omega} R\cos\gamma dV$$

является аддитивной функцией области σ. Найдем ее плотность в произвольной точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ области Ω,

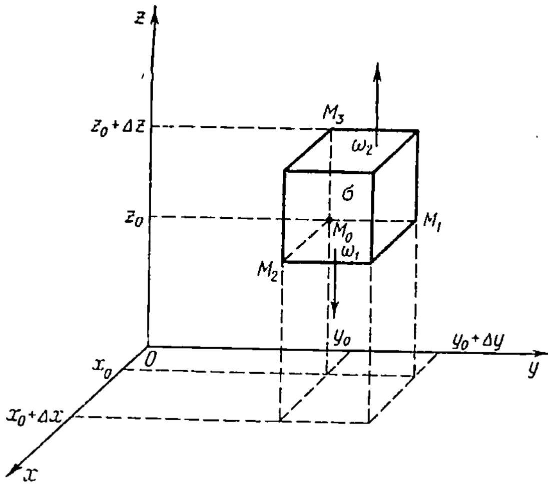

Рис. 67

предполагая для простоты, что она существует. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед σ, одна из вершин которого находится в точке M_0, а три вершины $M_1(x_0+\Delta x;\ y_0;\ z_0)$, $M_2(x_0;\ y_0+\Delta y;\ z_0)$, $M_3(x_0;\ y_0;\ z_0+\Delta z)$ лежат на ребрах параллелепипеда, которые проходят через точку M_0 (рис. 67).

Интеграл по внешней стороне границы параллелепипеда есть сумма интегралов по его граням. Из них только интегралы по нижней грани ω_1 и по верхней грани ω_2 отличны от нуля, так как нормали к остальным граням образуют с осью Oz прямые углы и, следовательно, для них $\cos\gamma=0$.

Угол между нормалью к грани ω_1 параллелепипеда и осью Oz равен π, поэтому для нее $\cos\gamma=-1$. Угол между нормалью к грани ω_2 и осью Oz равен нулю, поэтому для нее $\cos\gamma = 1$. Таким образом,

$$\Phi(\sigma) = \iint\limits_{\omega_1} R d\Pi - \iint\limits_{\omega_2} R d\Pi = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} R(x, y, z_0 +$$

$$+ \Delta z)\, dy - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} R(x, y, z_0)\, dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} [R(x, y, z_0 + \Delta z) - R(x, y, z_0)]\, dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} R'_z(x, y, c)\, dy \Delta z,$$

где c — число, находящееся между z_0 и $z_0 + \Delta z$.

Так как объем параллелепипеда

$$V(\sigma) = \Delta x \Delta y \Delta z = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} dy \Delta z,$$

то

$$\Phi(\sigma) - R'_z(M_0)\, V(\sigma) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} [R'_z(x, y, c)\ \ R'_z(M_0)]\, dy \Delta z.$$

Отсюда

$$|\Phi(\sigma) - R_z(M_0)\, V(\sigma)| \leqslant \alpha(\sigma)\, \Delta x \Delta y \Delta z = \alpha(\sigma)\, V(\sigma),$$

где $\alpha(\sigma) = \max |R'_z(x, y, z) - R'_z(M_0)|$ в области σ. Из последнего неравенства следует, что

$$\left| \frac{\Phi(\sigma)}{V(\sigma)} - R'_z(M_0) \right| \leqslant \alpha(\sigma).$$

Если теперь область σ стягивается к точке M_0, то $\alpha(\sigma) \to 0$, поскольку функция R'_z непрерывна. Таким образом,

$$\lim \frac{\Phi(\sigma)}{V(\sigma)} = R'_z(M_0).$$

Из этого равенства имеем

$$\Phi(\sigma) = \iint\limits_{\omega} R \cos\gamma\, d\Pi = \iiint\limits_{\sigma} R'_z(M)\, dV.$$

Аналогично можно показать, что

$$\iint_{\omega} P\cos\alpha d\Pi = \iiint_{\sigma} P'_x(M)\,dV,$$

$$\iint_{\omega} Q\cos\beta d\Pi = \iiint_{\sigma} Q'_y(M)\,dV.$$

Складывая три последних равенства, получаем равенство (8.7).

Пример. Вычислить интеграл

$$\iint_{\omega} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\Pi$$

по наружной стороне границы шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

Решение. Применяя формулу Остроградского, получаем

$$\iint_{\omega} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\Pi = 3\iiint_{\sigma} dV =$$

$$= 3V(\sigma) = 3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3.$$

§ 5. Формула Стокса

Пусть Ω^+ — заданная сторона двусторонней поверхности Ω. Будем говорить, что контур поверхности γ ориентирован *положительно* (*отрицательно*) относительно Ω^+, если на нем установлено направление, придерживаясь которого наблюдатель, движущийся по Ω^+ вдоль линии γ, оставляет поверхность Ω слева (справа).

Теорема 7.6. *Пусть на поверхности Ω и на ее границе Γ заданы три непрерывно дифференцируемые функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. Тогда имеет место следующая формула Стокса:*

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Omega^+}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\Pi, \qquad (8.8)$$

где Ω^+ любая сторона поверхности Ω; Γ — положительно ориентированный относительно Ω^+ контур поверхности Ω.

Доказательство. Допустим сначала, что поверхность Ω задана явным уравнением вида $z=\varphi(x, y)$, где функция $\varphi(x, y)$ определена в области D плоскости Oxy. Геометрически такая поверхность характеризуется тем, что прямые, проходящие через любую точку области D параллельно оси Oz, пересекают ее только в одной точке.

В качестве Ω^+ возьмем верхнюю сторону поверхности Ω, так что угол γ будет острым. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_{\lambda} P(x, y, \varphi(x, y))\,dx,$$

где λ — положительно ориентированный контур области D.

Применим к криволинейному интегралу в правой части равенства формулу Грина (7.24), полагая $P = P(x, y, \varphi(x, y))$ и $Q=0$. Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, \varphi(x, y))\,dxdy.$$

Учитывая, что P зависит от y непосредственно и через функцию $z=\varphi(x, y)$, и применяя правило дифференцирования сложной функции, находим:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx = -\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} q\right) dxdy,$$

где, как обычно, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Преобразуя по формуле (8.6) двойной интеграл по области D в поверхностный интеграл по Ω^+, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} P dx = \iint\limits_{\Omega^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma\right) d\Pi. \qquad (8.9)$$

Предположим теперь, что поверхность Ω пересекается с каждой прямой, параллельной любой из координатных осей не более, чем в одной точке. Тогда из формулы (8.9) циклической перестановкой в тройках (P, Q, R) и (x, y, z) получим еще два равенства

$$\int\limits_{\Gamma} Q dy = \iint\limits_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha\right) d\Pi, \qquad (8.10)$$

$$\int\limits_{\Gamma} R dz = \iint\limits_{\Omega^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta\right) d\Pi. \qquad (8.11)$$

Складывая равенства (8.9), (8.10) и (8.11), получаем формулу Стокса (8.8). Заметим, что формула Стокса получена пока в предположении, что прямые, параллельные любой координатной оси, пересекают поверхность Ω не более, чем в одной точке.

В общем случае поступаем следующим образом: разрезаем поверхность Ω некоторыми линиями на части, удовлетворяющие указанному условию, и для каждой из них выписываем формулу Стокса, а затем полученные равенства складываем. В правой части равенства получится поверхностный интеграл по Ω^+, а в левой — криволинейный интеграл по ее положительно ориентированной границе, так как интегралы по каждому разрезу берутся в двух взаимно противоположных направлениях и поэтому в окончательной формуле исчезают.

§ 6. Независимость пространственного криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть в области K пространства $Oxyz$ заданы три функции $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$. Пусть, далее, A и B — произвольные точки области K. Как и для случая плоскости, говорят, что *криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz \tag{8.12}$$

не зависит от пути интегрирования, если его значение на любом пути от A к B является функцией только начала A и конца B пути интегрирования.

Как и для плоского криволинейного интеграла (см. § 8, гл. VII), устанавливается, что криволинейный интеграл (8.12) не зависит от пути интегрирования, тогда и только тогда, когда такой интеграл по любому замкнутому пути, лежащему в области K, равен нулю.

Теорема 7.7. *Интеграл* (8.12) *не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{8.13}$$

Доказательство. Пусть Ω — произвольная поверхность, лежащая в области K, и γ — любая замкнутая линия, лежащая на этой поверхности. Как и для случая плоскости (см. § 8, гл. VII), устанавливается, что криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy+Rdz \tag{8.14}$$

есть аддитивная функция части σ стороны поверхности Ω, для которой γ является положительно ориентированным контуром.

Согласно формуле Стокса, плотность этой аддитивной функции поверхности σ равна

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma. \qquad (8.15)$$

Так как аддитивная функция равна нулю тогда и только тогда, когда ее плотность тождественно равна нулю, то и интеграл (8.14) по любой замкнутой линии γ равен нулю тогда и только тогда, когда выражение (8.15) тождественно равно нулю на любой поверхности, проходящей через линию γ, т. е. когда числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ произвольны. Это обстоятельство приводит к равенствам (8.13).

§ 7. Условие того, что выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом

Условимся считать, что дифференциальное выражение

$$Pdx+Qdy+Rdz \qquad (8.16)$$

является полным дифференциалом, если существует функция $u=u(x,\ y,\ z)$ такая, что ее полный дифференциал

$$du=Pdx+Qdy+Rdz. \qquad (8.17)$$

Это равенство равносильно трем равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial u}{\partial z}=R. \qquad (8.18)$$

Сама функция u, для которой справедливо равенство (8.17), называется *первообразной* для дифференциального выражения (8.16).

Теорема 7.8. *Выражение* (8.16) *является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда выполняются равенства* (8.13).

Доказательство. Допустим сначала, что выражение (8.16) является полным дифференциалом. Тогда существует первообразная функции u, для которой справедливы равенства (8.18). Продифференцируем первое из них по y, а второе по x. Тогда получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Считая заранее, что производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны и, следовательно, что обе частные производные, находящиеся в левой части последних равенств, равны, получаем третье из равенств (8.13). Справедливость остальных неравенств доказывается аналогично.

Предположим обратное, т. е. что выполнены равенства (8.13). Тогда интеграл (8.12) есть функция точек A и B. Записывая этот интеграл в виде

$$\int_A^B P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

и считая точку $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ фиксированной, а точку $B(x;\ y;\ z)$ — переменной, рассмотрим интеграл

$$u(x,\ y,\ z)=\int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{B(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Как и раньше, покажем, что функция $u(x,\ y,\ z)$ удовлетворяет равенствам (8.18), следовательно, выражение (8.16) является полным дифференциалом.

Если $v=v(M)$ есть какая-нибудь первообразная для полного дифференциала (8.16), то, как и в случае плоскости, устанавливается аналог формулы Ньютона—Лейбница

$$\int_A^B P\,dx+Q\,dy+R\,dz=v(B)-v(A). \qquad (8.19)$$

Например, так как функции $P=yz$, $Q=xz$, $R=xy$ удовлетворяют соотношениям (8.13), то выражение $yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ является полным дифференциалом. Его первообразной, как легко проверить, является функция $v=xyz$. Поэтому, например,

$$\int_{(1,2,-1)}^{(2,3,4)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=2\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot(-1)=8.$$

Цена 17 коп.